Red Matemática Antioquia

Antioquia
la más
educada

facebook.com/RedMatematicaAntioquia

@redmatematicant

redmatematica@antioquia.gov.co

Plan de mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las matemáticas en Antioquia

2012 - 2015

Gobernación de Antioquia
Sergio Fajardo Valderrama
Gobernador de Antioquia
Felipe Andrés Gil Barrera
Secretario de Educación de Antioquia
Horacio Arango Marín
Director Red Matemática Antioquia
Asesor Secretaria de Educación de Antioquia
Duqueiro Antonio Espinal Chavarría
Subsecretario para el Mejoramiento de la Calidad Educativa.
Adriana Toro
Subsecretaria Administrativa
María Isabel Castro Roldán
Asesora Red Matemáticas Antioquia
Sociedad Colombiana de Matemáticas
Coordinación Plan de Mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las Matemáticas en Antioquia.
Carlos Hernando Montenegro Escobar
Presidente
Jaime Alberto Amaya Gómez
Representante Sociedad Colombiana de Matemáticas en Medellín
Andrés García Pérez
Director Ejecutivo

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín
Escuela de Matemáticas
Coordinación Académica
Ignacio Mantilla Prada
Rector
Carlos Alfredo Salazar Molina
Vicerrector Sede Medellín
Luis Alfonso Vélez Moreno
Decano Facultad de Ciencias Sede Medellín
John Bayron Baena Giraldo
Director Escuela de Matemáticas
Equipo Editorial
Jorge Cossio Betancur
Jorge Enrique Mejía Laverde
Diego Mejía Duque
Débora María Tejada Jiménez
Revisión de Texto
Débora María Tejada
Diagramación
John Bayron Baena Giraldo
Bibiana López Rodríguez
Mauricio Andrés Osorio Lema
Algebra

Diseño de carátula: Alejandro Arango Lince
ISBN:
Primera edición: marzo de 2015
Impreso y hecho en Medellín, Colombia

Hecho el depósito legal.

ÁLGEBRA

Guías de clase para 90 lecciones

Autoras

Beatriz Elena Correa Restrepo

Luz Elena Muñoz Sierra

Celia Villegas de Arias

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLÍN

Tabla de Contenido

Página

Prólogo

Uno de los objetivos de la Sociedad Colombiana de Matemáticas (SCM) es el mejoramiento de la enseñanza y la difusión de las Matemáticas en nuestro medio. Teniendo presente este objetivo, la Gobernación de Antioquia invitó a la SCM a diseñar un plan de trabajo para mejorar la enseñanza de las Matemáticas en el Departamento de Antioquia. Las razones de esta invitación se ven reflejadas en los resultados en el área de Matemáticas de las pruebas SABER (mayo de 2012) y de los exámenes de admisión de la Universidad de Antioquia (mayo de 2012), y en los resultados de la Prueba de Matemáticas de Antioquia (Olimpiadas del Conocimiento, julio de 2012): la nota promedio en Matemáticas, considerando estos tres exámenes, fue de 1.9 sobre 5.

Con el fin de enfrentar el problema del bajo nivel matemático de los estudiantes de los últimos grados de la educación secundaria en el departamento de Antioquia, la SCM diseñó el "Plan de mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las Matemáticas en las instituciones educativas de Antioquia". Este texto, que llega hoy a sus manos, es uno de los muchos productos que el Plan quiere entregarle a Antioquia y hace parte de una colección de cinco textos, dedicados a las guías de clase para 90 lecciones, en las áreas de Precálculo, Álgebra, Trigonometría-Geometría Analítica, Geometría Euclidiana y Aritmética. Los textos de la colección fueron escritos para ayudarles a los maestros en la preparación de sus clases.

Las Matemáticas son como un edificio. Para que el edificio se sostenga firmemente es necesario que tenga buenas bases. Los conceptos elementales que se recogen en los textos de esta colección son las bases que debe haber construido, con ayuda de sus maestros, un alumno de secundaria que aspire a entrar a la Universidad. Se observará que en ellos se ha tratado de describir en detalle los pasos a seguir en cada tema, ejercicio o problema propuesto. Pensamos, basados en nuestra propia experiencia, que ésta es una buena manera de dictar una clase de Matemáticas. Volviendo a la analogía inicial, así como un muro del edificio se construye poco a poco colocando cada uno de los ladrillos que lo componen, la solución de un ejercicio o problema matemático es una sucesión ordenada de pasos lógicos y coherentes. Si en la construcción del muro faltan ladrillos o hay ladrillos mal colocados es muy posible que el muro se derrumbe. Si en la solución de un problema matemático los pasos están mal concatenados o faltan pasos, probablemente la solución sea incorrecta.

Así como un deportista debe dedicar muchas horas diarias a su entrenamiento, para poder soñar con triunfar, si queremos mejorar nuestra comprensión de las Matemáticas es necesario repasar lo mismo muchas veces, aunque parezca monótono y repetitivo, de esta forma podremos enfrentar con mayor lucidez la construcción del edificio de las Matemáticas.

Finalmente es importante señalar que estos textos no pretenden ser un tratado de Pedagogía. Más bien constituyen un conjunto articulado de conocimientos matemáticos que un docente de secundaria puede enseñar de manera efectiva con el uso de los saberes pedagógicos adquiridos en su formación académica. Responden entonces estos textos a nuestra convicción de que si se quiere enseñar bien algo no son suficientes ni las estrategias pedagógicas utilizadas ni el uso de las nuevas tecnologías informáticas, es indispensable tener previamente un conocimiento sólido de la materia que queremos enseñar.

CARLOS MONTENEGRO

PRESIDENTE, SOCIEDAD COLOMBIANA DE MATEMÁTICAS

Prefacio

Mejorar la enseñanza de las Matemáticas siempre es un reto. Los conceptos matemáticos básicos tienen cierto grado de complejidad y en consecuencia es crucial que los textos matemáticos que se escriban para apoyar el proceso de su enseñanza y aprendizaje usen un lenguaje claro que concentre su atención en los aspectos realmente importantes de estos conceptos y facilite su comprensión.

El presente texto es un conjunto de guías de clase en Álgebra para los maestros de la educación secundaria del Departamento de Antioquia, dentro del programa "Antioquia la más Educada", liderado por el Gobernador Sergio Fajardo Valderrama. Consideramos que estas guías constituyen una síntesis del material que es indispensable presentar en el aula de clase por parte del maestro. De allí que la exposición hecha en ellas de las nociones matemáticas básicas, que deben ser del conocimiento de todo bachiller antes de su ingreso a la universidad, sea lo más clara posible. Para alcanzar este objetivo hemos reducido la terminología matemática a la estrictamente necesaria y hemos prescindido de temas accesorios, que consideramos no son esenciales para la formación matemática de los estudiantes y que por el contrario pueden despertar en ellos un rechazo al estudio de las Matemáticas. Insistimos en que la función principal de este material es, de una parte, ayudarle al docente en su tarea cotidiana de preparación de clases, y de otra, brindarle al estudiante un resumen de los conocimientos mínimos que debe tener sobre la materia. Es por ello que en lugar de hablar de libro o de texto hemos preferido usar la palabra "guías", para referirnos a este material. En la bibliografía los lectores encontrarán libros y textos que les permitirán complementar el conocimiento básico que les brindan estas guías. Finalmente tenemos la esperanza de que las guías de clase, que hoy ponemos a consideración de los lectores, mejoren su percepción de la importancia de las Matemáticas y de su inmenso poder en la solución de problemas concretos, tanto de las ciencias naturales como de la vida cotidiana.

Comité Editorial

Introducción

El programa "Antioquia la más Educada", propuesta de la Gobernación del Departamento, nos encomendó la tarea de escribir 90 lecciones de Álgebra, para ser usadas como texto en la educación básica en Antioquia.

Nuestra experiencia como profesoras universitarias, nos permitió darnos cuenta del desnivel que, en el área de matemáticas, existe en diferentes instituciones educativas, posiblemente por falta de claridad en los requisitos necesarios para un desarrollo de los temas y, también, por no contar con un programa claro y completo.

Lo anterior conlleva a que muchos estudiantes no alcancen los objetivos requeridos para continuar con nuevos temas matemáticos, ya que se ven abrumados por una serie de lecciones que no siempre tienen un derrotero y a las cuales no le encuentran ninguna utilidad. Estamos convencidas de que la educación es una verdadera oportunidad, de ahí la importancia de agregar método y orden a las lecciones, de manera que sean realmente asimiladas por los alumnos.

Fue precisamente ésto lo que nos llevó a aceptar el reto, y a ponernos en la juiciosa tarea de elaborar un programa detallado, donde cada lección contiene un componente teórico, acompañado de ejemplos resueltos, paso a paso, con anotaciones al margen para mayor claridad y, finalmente, una serie de ejercicios propuestos con respuestas, para que el lector afiance lo aprendido. Se trata de una herramienta de uso cotidiano para los profesores y estudiantes, que redundará en mejores resultados para el sistema educativo de la región en general.

Las lecciones presentadas aquí son el resultado de este trabajo, elaborado en algunos meses, pero que sólo fue posible al reunir nuestra experiencia individual de más de 30 años en docencia en el área de las matemáticas. Para nosotras es un motivo de orgullo aportar nuestro granito de arena para que, efectivamente, Antioquia siga siendo la más educada y, gracias a ello, las oportunidades de nuestros jóvenes, actualmente aún escasas, se multipliquen.

Las autoras

Lección 1

Conjuntos numéricos

En esta lección haremos un rápido recorrido por los conjuntos numéricos, teniendo en cuenta su aparición, su uso y su representación geométrica en la recta real.

- ### Números naturales

  En Aritmética trabajamos con los números naturales que son el 1 y todos los que se obtienen a partir de él, agregando sucesivamente la unidad. El conjunto de los **números naturales** se denota por $\mathbb{N}$, así:

  $$\mathbb{N} = \{1,\ 1+1=2,\ 2+1=3,\ \cdots,\ n,\ n+1, \cdots\} = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ n+1, \cdots\}.$$

  Desde la antigüedad estos números se utilizaban para contar y con ellos se *sumaban* naturalmente los objetos. Cuando las cantidades eran muy grandes se agrupaban para luego sumarse, dando origen al *producto o multiplicación* entre números. Las leyes asociativa y conmutativa de la suma y el producto se usaban intuitivamente.

- ### Números enteros

  Con los números naturales se resolvían ecuaciones de la forma $a + x = b$ con a menor que b, es decir, dados dos números naturales a y b con a menor que b, se trataba de hallar otro número que sumado a a diera b y apareció la resta $x = b - a$, donde b, el minuendo, es mayor que a, el sustraendo.

  Cuando el minuendo es igual al sustraendo, $x = a - a$ aparece un nuevo número, el 0, que representa la ausencia de cantidad.

  ¿Cómo resolver una ecuación de la forma $a + x = b$ con a y b números naturales cuando a es mayor que b? Para su solución se crearon los **números enteros negativos**.

  Al resolver la ecuación $a + x = b$ con a mayor que b, podemos ampliar la resta a los casos en los que el minuendo es un número menor que el sustraendo, así por ejemplo, $7 - 9 = -2$ y $13 - 25 = -12$.

  Los números enteros negativos tienen la propiedad de que al sumarse con los correspondientes números naturales dan como resultado 0. Así, por ejemplo, $4 + (-4) = 0$, $5 + (-5) = 0$, $30 + (-30) = 0$ y viceversa, es decir, si a ellos se les suma el correspondiente número natural, el resultado también es 0: $-4+4 = 0$, $-5+5 = 0$, $-30+30 = 0$. Se conocen también como ***opuestos aditivos*** de los números naturales.

El conjunto conformado por los números naturales, el 0 y los opuestos aditivos de los números naturales, o enteros negativos, es el conjunto de los **números enteros**, denotado por $\mathbb{Z}$. Esto es,

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}.$$

Claramente $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

En general, el opuesto aditivo de cualquier número entero x se denota por $-x$ y es aquel número que sumado a x da el 0. Así, por ejemplo, el opuesto aditivo de 4 es -4, el opuesto aditivo de 7 es -7, el opuesto aditivo de -5 es $-(-5) = 5$.

Podemos representar geométricamente los números enteros utilizando una línea recta, que por conveniencia dibujaremos horizontal. Tomamos un punto arbitrario sobre ella, al que asignaremos el número 0. Seleccionamos una unidad de medida, que colocaremos a la derecha, a partir del punto correspondiente al 0. Al punto sobre la recta que coincide con el extremo derecho de la unidad de medida le asignamos el número 1, a partir de este punto colocamos nuevamente la unidad, al punto del extremo derecho corresponde el 2, y así sucesivamente.

Para ubicar en la recta los números enteros negativos, colocamos la unidad de medida escogida para representar los números naturales, a la izquierda del 0. El punto sobre la recta correspondiente al extremo izquierdo de la unidad de medida es -1, al colocarla nuevamente a la izquierda de -1 tendremos -2, y así sucesivamente.

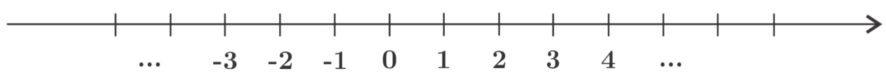

Figura 1.1

• Números racionales

La necesidad de medir magnitudes continuas tales como la longitud, el volumen y el peso, entre otras, llevó al hombre a introducir los números fraccionarios o racionales.

Cuando tomamos una unidad de medida, por ejemplo el metro, para medir una longitud, digamos la altura del salón de clases, pueden ocurrir dos cosas: que la unidad de medida quepa un número exacto de veces en la longitud a medir, en cuyo caso la altura del salón es un número entero, o, que no quepa exactamente, y entonces debemos dividir la unidad en partes de tal manera que éstas quepan exactamente. Estas partes se llaman *fracciones.*

Expresamos las fracciones como el cociente de dos números enteros, llamados respectivamente numerador y denominador, este último distinto de 0. El denominador representa el número de partes en el que dividimos la unidad y el numerador el número de partes que caben exactamente en la longitud a medir.

Así, por ejemplo, si consideramos el metro como unidad y tuvimos que dividirlo en 4 partes iguales de las cuales usamos 3 para cubrir la altura del salón, entonces la altura del salón es $3/4$ de metro.

En el conjunto de los números enteros se resolvían ecuaciones de la forma $a \cdot x = b$, cuando a es divisor de b, es decir, cuando el resultado de dividir b entre a es un número entero.

En el caso en el que b no es divisor de a, para resolver la ecuación $a \cdot x = b$ se necesita 'partir la unidad' en pedazos o fracciones.

Así, por ejemplo, la solución de la ecuación $3x = 2$ es $x = \frac{2}{3}$, es decir, para hallar un número que al multiplicarse por 3 de como resultado 2, debemos dividir la unidad en 3 partes iguales y de ellas tomar 2.

El conjunto de los números de la forma a/b con a y b números enteros y $b \neq 0$, conocidos como números fraccionarios o racionales se denota por $\mathbb{Q}$ y se llama conjunto de los **números racionales**, es decir,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ \text{ con } a \text{ y } b \text{ números enteros y } b \neq 0 \right\}.$$

Todo número entero a se puede escribir, por ejemplo, como $\dfrac{a}{1}$, es decir, todo número entero es un número racional, y así $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Para representar los números racionales en la recta, dividimos el segmento comprendido entre 0 y 1 en tantas partes como indique el denominador y de ellas tomamos las que nos indique el numerador. En el caso en el que el numerador sea mayor que el denominador debemos continuar dividiendo los segmentos subsiguientes hasta tener las partes que indique el numerador. Si el número es negativo realizamos el mismo procedimiento a la izquierda del 0.

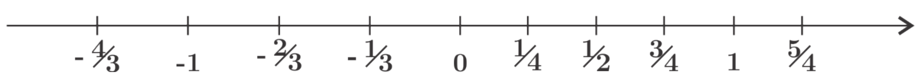

Figura 1.2

Representación decimal de los números racionales

El resultado de la división del numerador entre el denominador de un número racional es la **representación decimal** del número.

Ejemplo 1.1

La representación decimal de $\dfrac{5}{4}$ es 1,25, puesto que si dividimos 5 entre 4 el resultado es $1,25$. A 1 se le conoce como *parte entera* y a 25 como *parte decimal* del número. Observamos que la parte decimal tiene un número finito de cifras.

Ejemplo 1.2

La representación decimal de $\dfrac{1}{7}$ es $0,142857142857\cdots$. La parte entera es 0 y la parte decimal es $142857142857\cdots$. Si continuamos la división observamos que en la parte decimal, 142857 se repite indefinidamente. En estos casos se acostumbra a escribir la representación decimal del número colocando una línea horizontal sobre la parte decimal que se repite, así:

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}.$$

En general todo número racional tiene una representación decimal finita, es decir, tiene un número finito de cifras decimales, o infinita periódica, es decir, tiene un número infinito de cifras decimales que a partir de cierta cifra se repiten indefinidamente.

Ejemplo 1.3

$$\frac{1}{6} = 0,16666\cdots = 0,1\overline{6}.$$

En este caso no toda la parte decimal se repite indefinidamente, por lo que sólo colocamos la línea horizontal sobre el 6 que es el que se repite.

Ejemplo 1.4

Como $-\dfrac{7}{11} = -0,63636\cdots = -0,6\overline{36}$, la parte entera es 0 es y la parte decimal es $6\overline{36}$.

- ## Números irracionales

Los números que no pueden escribirse en la forma a/b, con a y b enteros y $b \neq 0$ se llaman **números irracionales**. Se denotan por $\mathbb{I}$ y se caracterizan por tener una representación decimal infinita no periódica, esto es, tienen infinitas cifras decimales que no se repiten. Por ejemplo: $\sqrt{2} = 1,414213562\cdots$, $\sqrt{3} = 1,732050808\cdots$, $\pi = 3,141592654\cdots$.

Ubiquemos algunos de ellos en la recta.

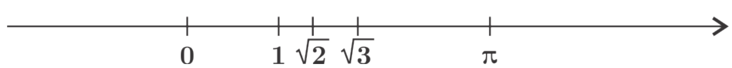

Figura 1.3

- ## Números reales

El conjunto de los **números reales** es el conjunto conformado por los números racionales y los irracionales, es decir, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Tenemos entonces la siguiente cadena de inclusiones:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \text{ con } \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Como a cada número real le corresponde un punto sobre la recta, y a cada punto sobre la recta podemos asignarle un número real, a la recta la llamaremos **recta real** ó **recta numérica**.

En el conjunto de los números reales están definidas dos operaciones llamadas *suma o adición* $(+)$ y *multiplicación o producto* $(.)$ que cumplen, entre otras, las siguientes propiedades:

Si a, b y c son números reales,

- Propiedad asociativa:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

- Propiedad conmutativa:

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

- Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma:

$$a\,(b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Ejemplo 1.5

$3 + 5 = 5 + 3.$

$-5 \cdot 2 = 2 \cdot (-5).$

$-3 + (2 - 5) = (-3 + 2) - 5.$

$\frac{1}{2}\left(2 + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}.$

Los conjuntos numéricos se ampliaron aún más cuando se trató de resolver ecuaciones de la forma $x^2 + 1 = 0$, dando lugar al conjunto de los **números complejos**, denotado por $\mathbb{C}$, que estudiaremos más adelante.

Ejercicios propuestos

1. Determinar el menor conjunto numérico al cual pertenecen los siguientes números y ubicarlos en la recta real:

$a.\ -12$	$d.\ \frac{16}{3}$	$g.\ -4,161616...$
$b.\ 3$	$e.\ \sqrt[3]{8}$	$h.\ \frac{11}{2}$
$c.\ 1,25$	$f.\ \sqrt{7}$	$i.\ -\pi.$

2. Hallar la representación decimal de los siguientes números racionales:

$a.\ \frac{2}{5}$	$d.\ \frac{2}{9}$	$g.\ \frac{7}{3}$
$b.\ -\frac{1}{5}$	$e.\ \frac{3}{8}$	$h.\ -\frac{17}{6}$

c. $\frac{5}{2}$ *f.* $-\frac{8}{5}$ *i.* $\frac{4}{2}$.

Respuestas

1. *a.* $\mathbb{Z}$ *d.* $\mathbb{Q}$ *g.* $\mathbb{Q}$

   b. $\mathbb{N}$ *e.* $\mathbb{N}$ *h.* $\mathbb{Q}$

   c. $\mathbb{Q}$ *f.* $\mathbb{I}$ *i.* $\mathbb{I}$.

2. *a.* $0,4$ *d.* $0,\overline{2}$ *g.* $2,\overline{3}$

   b. $-0,2$ *e.* $0,375$ *h.* $-2,8\overline{3}$

   c. $2,5$ *f.* $-1,6$ *i.* $2,0$.

Lección 2

Terminología básica I

En esta lección estudiaremos el concepto de expresión algebraica y el significado de expresiones de la forma a^n, donde n es un número natural, y aprenderemos leyes que nos permitan realizar operaciones y simplificar expresiones algebraicas que las contengan.

En **Aritmética** trabajamos con números. En **Álgebra**, además de los números, trabajamos con letras que representan números. Con números y letras realizamos operaciones como si se tratara sólo de números.

Las operaciones fundamentales del Álgebra, u operaciones algebraicas, son: suma o adición, resta o sustracción, multiplicación y división.

Una **expresión algebraica** es una expresión que consta de símbolos (números o letras) conectados mediante signos de operaciones. Las operaciones utilizadas son, además de las fundamentales del Álgebra, la potenciación y la radicación. Por ejemplo, las siguientes son expresiones algebraicas:

$$b \quad , \quad -2x \quad , \quad a(w-z) \quad , \quad \frac{2a-3b^2}{c+5}.$$

Para trabajar con expresiones algebraicas nos referiremos a continuación al significado de expresiones de la forma a^n, con n un número entero positivo, y a las leyes para realizar operaciones entre ellas y simplificar resultados.

Recordemos con unos ejemplos el uso de exponentes en Aritmética:

Ejemplo 2.1

1. $3^2 = 3 \cdot 3 = 9.$
2. $(-5)^3 = (-5)\,(-5)\,(-5) = -125.$
3. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16}.$
4. $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$

Observamos que una potencia de un número, con exponente entero positivo, es una forma abreviada de expresar un producto del número por sí mismo, tantas veces como lo indique el exponente. Igual ocurre si en lugar de un número tenemos una expresión algebraica a:

El producto $a \cdot a$ se escribe $\boldsymbol{a^2}$ y se lee ***a* al cuadrado**.

El producto $a \cdot a \cdot a$ se escribe $\boldsymbol{a^3}$ y se lee **$\boldsymbol{a}$ al cubo**.

En general, si n es un número **entero positivo**, el producto $a \cdot a \cdots a$ se denota a^n, donde n indica el número de veces que se repite el factor a.

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}.}$$

$\boldsymbol{a^n}$ se llama la **$\boldsymbol{n}$-ésima potencia de $\boldsymbol{a}$** y se lee **$\boldsymbol{a}$ a la $\boldsymbol{n}$**. La expresión $\boldsymbol{a}$ se llama **base** y $\boldsymbol{n}$ se llama **exponente**.

Ejemplo 2.2

1. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = \left(\dfrac{x}{y}\right)\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
2. $(a+1)^3 = (a+1)(a+1)(a+1)$.
3. $(a+3b)^4 = (a+3b)(a+3b)(a+3b)(a+3b)$.

Ejemplo 2.3

Escribir cada una de las expresiones siguientes en la forma a^n, con n un entero positivo:

1. a^3a^4.
2. $(a^4)^3$.
3. $\dfrac{a^5}{a^2}$ con $a \neq 0$.

Solución

1. $a^3a^4 = (a \cdot a \cdot a)(a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^7$.
2. $(a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a \cdot a)(a \cdot a \cdot a \cdot a)(a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^{12}$.
3. $\dfrac{a^5}{a^2} = \dfrac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = \dfrac{a}{a}.\dfrac{a}{a} \cdot a \cdot a \cdot a = 1 \cdot 1 \cdot a \cdot a \cdot a = 1 \cdot a^3 = a^3$.

Las siguientes propiedades, conocidas como **leyes de los exponentes**, nos permiten realizar las operaciones con potencias de una manera más sencilla.

Leyes de los exponentes

Sean a y b expresiones algebraicas y m y n números enteros positivos. Entonces:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

   El producto de potencias que tienen la misma base es una potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes de las potencias dadas.

2. Si $a \neq 0$ y m es mayor que n, $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

   Si m es un número mayor que n, el cociente de potencias que tienen la misma base es una potencia con la misma base y y cuyo exponente es la diferencia entre el exponente del numerador y el exponente del denominador.

3. $(a^m)^n = a^{mn}$.

   Una potencia elevada a un exponente da como resultado una potencia con la base inicial elevada al producto de los dos exponentes.

4. $(ab)^n = a^n b^n$.

   La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de cada uno de los factores.

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, con $b \neq 0$.

   La potencia de un cociente es igual al cociente de la potencia del numerador entre la potencia del denominador.

Usando la definición, veamos el por qué de algunas de estas leyes:

1. $a^m \cdot a^n = \underbrace{\underbrace{aa\ldots a}_{m \text{ factores}} \cdot \underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ factores}}}_{m+n \text{ factores}} = a^{m+n}$.

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\dfrac{a}{b}\dfrac{a}{b}\cdots\dfrac{a}{b}}_{n \text{ factores}} = \dfrac{\overbrace{aa\ldots a}^{n \text{ factores}}}{\underbrace{bb\ldots b}_{n \text{ factores}}} = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Intente justificar las otras tres leyes.

Veamos en los siguientes ejemplos la aplicación de esta leyes. Indique en cada uno las leyes de exponentes utilizadas.

Ejemplo 2.4

1. $5^3 \cdot 5^6 = 5^{3+6} = 5^9$.
2. $\dfrac{4^7}{4^2} = 4^{7-2} = 4^5$.
3. $(7^6)^3 = 7^{6\cdot 3} = 7^{18}$.
4. $(5 \cdot 8)^4 = 5^4 8^4$.
5. $\dfrac{(16)^2 \cdot 4^5}{2^6} = \dfrac{(2^4)^2 (2^2)^5}{2^6} = \dfrac{2^8 \cdot 2^{10}}{2^6} = \dfrac{2^{8+10}}{2^6} = 2^{18-6} = 2^{12}$.
6. $\left(\dfrac{9}{2}\right)^3 \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{9^3}{2^3} \cdot \dfrac{1^2}{3^2} = \dfrac{(3^2)^3}{2^3} \cdot \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{2^3} \cdot \dfrac{3^6}{3^2} = \dfrac{1}{2^3} \cdot 3^{6-2} = \dfrac{3^4}{2^3}$.

7. $\left(\dfrac{2}{x}\right)^4 = \dfrac{2^4}{x^4},\ \ x \neq 0.$

8. $(4a^3)(3a^5) = 4 \cdot 3a^3a^5 = 12a^{3+5} = 12a^8.$

9. $(5y^2)(-2y^3)^3 = (5y^2)(-2)^3(y^3)^3 = 5(-8)y^2y^9 = -40y^{2+9} = -40y^{11}.$

10. $\dfrac{2w^5}{w^2} = 2 \cdot \dfrac{w^5}{w^2} = 2w^{5-2} = 2w^3,\ \ w \neq 0.$

Ejemplo 2.5

En cada numeral, simplificar la expresión algebraica dada y expresar la respuesta con exponentes positivos. Suponer que todas las letras representan números reales distintos de cero.

1. $(-2a^2b^3)^6.$
2. $\dfrac{4x^3y^7}{5x^2y^5}.$
3. $\dfrac{18x^{11}}{(6x^4)^2}.$
4. $(4a^4b^3)^2(5a^2b^5).$
5. $\dfrac{(-2x^3z)^5}{16(xz^2)^2}.$

Solución

1. $(-2a^2b^3)^6 = (-2)^6(a^2)^6(b^3)^6 = 64a^{12}b^{18}.$
2. $\dfrac{4x^3y^7}{5x^2y^5} = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{x^3}{x^2} \cdot \dfrac{y^7}{y^5} = \dfrac{4}{5} \cdot x^{3-2} \cdot y^{7-5} = \dfrac{4}{5}xy^2.$
3. $\dfrac{18x^{11}}{(6x^4)^2} = \dfrac{18x^{11}}{6^2(x^4)^2} = \dfrac{18x^{11}}{36x^8} = \dfrac{18}{36} \cdot \dfrac{x^{11}}{x^8} = \dfrac{1}{2}x^{11-8} = \dfrac{1}{2}x^3.$
4. $$\begin{aligned}\left(4a^4b^3\right)^2\left(5a^2b^5\right) &= \left(4^2\left(a^4\right)^2\left(b^3\right)^2\right)\left(5a^2b^5\right)\\ &= \left(16a^8b^6\right)\left(5a^2b^5\right)\\ &= (16)(5)a^8a^2b^6b^5\\ &= 80a^{10}b^{11}.\end{aligned}$$
5. $\dfrac{(-2x^3z)^5}{16(xz^2)^2} = \dfrac{(-2)^5(x^3)^5z^5}{2^4x^2(z^2)^2} = \dfrac{-2^5}{2^4} \cdot \dfrac{x^{15}}{x^2} \cdot \dfrac{z^5}{z^4} = -2x^{13}z.$

Ejercicios propuestos

En cada numeral, simplificar la expresión algebraica dada y expresar la respuesta con exponentes positivos. Suponer que todas las letras representan números reales distintos de cero.

1. $\left(-3b^4\right)\left(4b^2\right)\left(\frac{1}{6}b^7\right)$.
2. $\left(-3xy^2z\right)^3\left(\frac{2x^2y}{z}\right)^2$.
3. $\frac{\left(a^3b^4c^3\right)^4}{\left(ab^3c^3\right)^3}$.
4. $\left(\frac{9x^4y^2z^3}{27x^2yz}\right)^5$.
5. $\left(\frac{4}{9}\right)^3\left(\frac{3x^4}{2y}\right)^2\left(\frac{2y^3}{x^3}\right)^2$.

Respuestas

1. $-2b^{13}$.
2. $-108x^7y^8z$.
3. $a^9b^7c^3$.
4. $\frac{1}{243}x^{10}y^5z^{10}$.
5. $\frac{64}{81}x^2y^4$.

Lección 3

Terminología básica II

En esta lección vamos a definir a^n, para n cero o n entero negativo, quedando así definidas las potencias para cualquier exponente entero.

Las potencias con exponente 0 y exponentes enteros negativos se definen de modo que las leyes de los exponentes antes enunciadas, sigan siendo válidas cualesquiera sean los enteros m y n.

Por ejemplo, para que la segunda ley sea válida cuando $m = n$, es obligatorio definir $a^0 = 1$. Tenemos, por lo tanto, la siguiente definición:

$$\boxed{a^0 = 1 \quad , \quad a \neq 0.}$$

La expresión 0^0 no está definida[1].

Por otra parte, para que la misma ley sea válida con $m = 0$ y n entero positivo, debemos tener, para $a \neq 0$,

$$\frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

y como $a^0 = 1$, entonces a^{-n} debe ser igual a $\dfrac{1}{a^n}$. Con base en esto se define

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad n \text{ entero positivo y } a \neq 0.}$$

Se sigue de la anterior definición, que $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$.

Tenemos así definidas las potencias para cualquier exponente entero (positivo, cero o negativo). Se puede comprobar que efectivamente, las leyes de los exponentes continúan siendo válidas cualesquiera sean los enteros m y n.

Veamos en el siguiente ejemplo la aplicación de las definiciones y de las leyes para exponentes negativos o cero.

[1] Un argumento que ayuda a entender por qué 0^0 no está definida es el siguiente: Puesto que $0^n = 0$ para todo número positivo n, sería natural definir $0^0 = 0$; pero, por otro lado, como $a^0 = 1$ para $a \neq 0$, también sería natural definir $0^0 = 1$. Luego, no hay un único valor que resulte natural para 0^0.

Ejemplo 3.1

1. $(-2)^0 = 1$.
2. $5y^{-3} = 5 \cdot \dfrac{1}{y^3} = \dfrac{5}{y^3}$.
3. $\dfrac{7^{-6}}{7^{-2}} = 7^{-6-(-2)} = 7^{-4} = \dfrac{1}{7^4}$.

Ejemplo 3.2

Hallar el valor exacto de las siguientes expresiones:

1. $(-2)^6$. 2. -2^6. 3. -2^{-6}. 4. $2^{-3} - 3^{-2}$. 5. $3^0 + 0^3$.

6. $\dfrac{3^{-3}}{2^{-3}}$. 7. $\dfrac{4^{-3}}{2^{-8}}$. 8. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \dfrac{9}{16}$. 9. $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^3$.

Solución

1. $(-2)^6 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = 64$.
2. $-2^6 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -64$. Observamos que $(-2)^6 \neq -2^6$.
3. $-2^{-6} = -\dfrac{1}{2^6} = -\dfrac{1}{64}$.
4. $2^{-3} - 3^{-2} = \dfrac{1}{2^3} - \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{9-8}{72} = \dfrac{1}{72}$.
5. $3^0 + 0^3 = 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 = 1 + 0 = 1$.
6. $\dfrac{3^{-3}}{2^{-3}} = \dfrac{\frac{1}{3^3}}{\frac{1}{2^3}} = \dfrac{1}{3^3} \cdot \dfrac{2^3}{1} = \dfrac{2^3}{3^3} = \dfrac{8}{27}$.
7. $\dfrac{4^{-3}}{2^{-8}} = \dfrac{(2^2)^{-3}}{2^{-8}} = \dfrac{2^{-6}}{2^{-8}} = 2^{-6-(-8)} = 2^{-6+8} = 2^2 = 4$.
8. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \dfrac{9}{16} = \dfrac{3^{-2}}{2^{-2}} \cdot \dfrac{3^2}{2^4} = \dfrac{3^{-2+2}}{2^{-2+4}} = \dfrac{3^0}{2^2} = \dfrac{1}{4}$.
9. $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{4^{-2}}{5^{-2}} \cdot \dfrac{2^3}{5^3} = \dfrac{(2^2)^{-2}\,2^3}{5^{-2}5^3} = \dfrac{2^{-4}2^3}{5^{-2}5^3} = \dfrac{2^{-4+3}}{5^{-2+3}} = \dfrac{2^{-1}}{5} = \dfrac{\frac{1}{2}}{5} = \dfrac{1}{10}$.

Notación científica

Se dice que un número positivo está escrito en **notación científica** si está expresado en la forma $a \,\mathrm{x}\, 10^n$, con a un número real mayor o igual que 1 y menor que 10 y n un entero.

La notación científica se utiliza a menudo para escribir números muy grandes o muy pequeños, lo cual facilita su lectura y las operaciones entre ellos.

Ejemplo 3.3

Expresar los siguientes números en notación científica:

1. 10.000.
2. $0,00000152$.
3. $5.700.000.000.000$.
4. $0,00002272$.

Solución

1. $10.000 = 1\,\mathrm{x}\,10^4$.
2. $0,00000152 = 1,52\,\mathrm{x}\,10^{-6}$.
3. $5.700.000.000.000 = 5,7\,\mathrm{x}\,10^{12}$.
4. $0,00002272 = 2,272\,\mathrm{x}\,10^{-5}$.

Observemos, en el ejemplo anterior, que el exponente positivo de la potencia de 10 indica el número de lugares que la coma (,) se debe desplazar hacia la derecha y el exponente negativo el número de lugares que se debe desplazar hacia la izquierda.

Ejemplo 3.4

En cada numeral, simplificar la expresión algebraica dada y expresar la respuesta con exponentes positivos. Suponer que todas las letras representan números reales distintos de cero.

1. $\left(-5x^3y^{-2}\right)^{-2}$.
2. $\left(\dfrac{12x^4}{6x}\right)^4\left(\dfrac{1}{2x^6}\right)^2$.
3. $\dfrac{2a^2b^{-5}c^{-7}}{5a^{-3}b^{-4}c^{-6}}$.
4. $\left(\dfrac{b^{-2}a^{-1}t^0}{b^{-3}a^{-2}t^{-1}}\right)^2$.
5. $\left(\dfrac{a^{-1}b^2c^{-2}}{a^0b^2c^{-3}}\right)^{-4}$.

Solución

1. $\left(-5x^3y^{-2}\right)^{-2} = (-5)^{-2}\left(x^3\right)^{-2}\left(y^{-2}\right)^{-2} = (-5)^{-2}x^{-6}y^4 = \dfrac{1}{(-5)^2}\cdot\dfrac{1}{x^6}\cdot y^4 = \dfrac{y^4}{25x^6}$.

2. $$\left(\frac{12x^4}{6x}\right)^4\left(\frac{1}{2x^6}\right)^2 = \left(\frac{12}{6}\cdot\frac{x^4}{x}\right)^4\left(\frac{1^2}{2^2\left(x^6\right)^2}\right)$$
$$= \left(2x^3\right)^4\left(\frac{1}{4x^{12}}\right)$$
$$= \frac{16x^{12}}{4x^{12}}$$
$$= 4x^0$$
$$= 4.$$

3. $$\frac{2a^2b^{-5}c^{-7}}{5a^{-3}b^{-4}c^{-6}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{a^2}{a^{-3}}\cdot\frac{b^{-5}}{b^{-4}}\cdot\frac{c^{-7}}{c^{-6}}$$
$$= \frac{2}{5}a^{2+3}b^{-5+4}c^{-7+6}$$
$$= \frac{2}{5}a^5b^{-1}c^{-1}$$
$$= \frac{2a^5}{5bc}.$$

4. $$\left(\frac{b^{-2}a^{-1}t^0}{b^{-3}a^{-2}t^{-1}}\right)^2 = \frac{\left(b^{-2}\right)^2\left(a^{-1}\right)^2(1)^2}{\left(b^{-3}\right)^2\left(a^{-2}\right)^2\left(t^{-1}\right)^2}$$
$$= \frac{b^{-4}a^{-2}}{b^{-6}a^{-4}t^{-2}}$$
$$= \frac{b^{-4}}{b^{-6}}\cdot\frac{a^{-2}}{a^{-4}}\cdot\frac{1}{t^{-2}}$$
$$= b^{-4+6}a^{-2+4}t^2$$
$$= a^2b^2t^2.$$

5. $$\left(\frac{a^{-1}b^2c^{-2}}{a^0b^2c^{-3}}\right)^{-4} = \left(\frac{a^{-1}}{a^0}\cdot\frac{b^2}{b^2}\cdot\frac{c^{-2}}{c^{-3}}\right)^{-4}$$
$$= \left(a^{-1}b^0c^1\right)^{-4}$$
$$= a^4b^0c^{-4}$$
$$= a^4\cdot 1\cdot\frac{1}{c^4}$$
$$= \frac{a^4}{c^4}.$$

Ejercicios propuestos

I. En cada numeral, simplificar la expresión algebraica dada y expresar la respuesta con exponentes positivos. Suponer que todas las letras representan números reales distintos de cero.

1. $\left(-2a^2bc^{-4}\right)\left(5a^{-1}b^3c^4\right)$.

2. $\left(-4x^3\right)^2\left(8x^4\right)^{-1}$.

3. $\dfrac{\left(6z^2\right)\left(2z^2\right)^4}{\left(3z^2\right)^5}$.

4. $\left(\dfrac{2xy^2}{16x^3}\right)^{-2}(8x)^{-4}$.

5. $\left(\dfrac{2^{-4}a^{-1}b^2}{4^{-1}a^{-2}b^{-1}}\right)^2$.

II. Expresar los siguientes números en notación científica:

1. $0,005$.
2. $53.540.000$.
3. $2.000.000$.
4. $0,0000737$.
5. 525.

Respuestas

I
1. $-10ab^4$.
2. $2x^2$.
3. $\dfrac{32}{81}$.
4. $\dfrac{1}{64y^4}$.
5. $\dfrac{1}{16}a^2b^6$.

II.
1. $5\,\mathrm{x}\,10^{-3}$.
2. $5,354\,\mathrm{x}\,10^{7}$.
3. $2\,\mathrm{x}\,10^{6}$.
4. $7,37\,\mathrm{x}\,10^{-5}$.
5. $5,25\,\mathrm{x}\,10^{2}$.

Lección 4

Polinomios

En esta lección estudiaremos unas expresiones algebraicas especiales llamadas polinomios y los conceptos de término y grado asociados a ellos, además de los distintos tipos de polinomios.

Expresiones algebraicas como

$$7x^2 - 3x \quad , \quad x^3 + 2x + 8 \quad , \quad 2x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 5x^2$$

se conocen como polinomios en la letra o variable x. Observamos que cada uno de ellos es una suma de expresiones del tipo ax^k, con a un número real y k un entero positivo o cero[1].

En general, una suma de expresiones del tipo ax^k, con a un número real y k un entero positivo o cero, se llama **polinomio en** x o **polinomio en la variable** x. En lugar de la letra x se puede usar cualquier otra letra.

Ejemplo 4.1

1. $3x + 1$ es un polinomio en x.
2. $2y^3 + (-5)\,y + 4$ es un polinomio en y, que usualmente escribimos como $2y^3 - 5y + 4$.
3. $3z^5 + \dfrac{2}{z+1}$ no es un polinomio porque $\dfrac{2}{z+1}$ no es de la forma az^k, con a número real y k entero positivo o cero.
4. $\sqrt{3}x + \dfrac{1}{2}x^2$ es un polinomio en la variable x.

En un polinomio en x, cada una de las expresiones ax^k se llama **término** del polinomio. Al número a se le conoce como **coeficiente numérico** o simplemente **coeficiente** del término ax^k; el **signo** del término ax^k es el signo que tenga el coeficiente a. El **grado** del término es el exponente de la variable, si el coeficiente es diferente de cero. Por ejemplo, el grado de $7x^2$ es 2, mientras que el de 8 es 0, considerando 8 como $8x^0$.

[1] Convenimos en ver el sumando 8 en el polinomio $x^3 + 2x + 8$, como si fuese $8x^0$. En general, convenimos que en cualquier polinomio, un sumando que sea un número a, se verá como si fuese ax^0.

Ejemplo 4.2

1. El polinomio $4x^2 + (-15)\,x + 25$, que escribimos simplemente como $4x^2 - 15x + 25$, tiene 3 términos con las siguientes características:

Término	**Signo**	**Coeficiente**	**Grado**
$4x^2$	positivo $(+)$	4	2
$-15x$	negativo $(-)$	-15	1
25	positivo $(+)$	25	0

2. En el polinomio $2x^5 + 5x^3 + \left(-\dfrac{3}{4}\right) x + 5$, que escribimos como $2x^5 + 5x^3 - \dfrac{3}{4}x + 5$, sus términos tienen las siguientes características:

Término	**Signo**	**Coeficiente**	**Grado**
$2x^5$	positivo $(+)$	2	5
$5x^3$	positivo $(+)$	5	3
$-\dfrac{3}{4}x$	negativo $(-)$	$-\dfrac{3}{4}$	1
5	positivo $(+)$	5	0

Un polinomio que consta de un solo término se llama **monomio,** de dos términos **binomio** y de tres términos **trinomio.** Los monomios de la forma a, donde a es un número, se conocen como **polinomios constantes**.

Ejemplo 4.3

4 y -9 son polinomios constantes.

$2x^3$ y $-3y$ son monomios.

$3x^2 - 5$ y $z^3 + 2z$ son binomios.

$6x^2 - 5x + 4$ y $3x^4 - 2x^2 + x$ son trinomios.

El **grado** de un polinomio en una variable es el del término de mayor grado del polinomio. Por ejemplo, el grado de $4x^2 - 15x + 25$ es 2, el de $2x^5 + 5x^3 - \dfrac{3}{4}x + 5$ es 5 y el del polinomio constante 4 es 0.

Al polinomio constante 0, llamado **polinomio cero**, no se le asigna ningún grado.

También podemos considerar polinomios en más de una variable. Por ejemplo, $x^2 + xy + y^3$ es un polinomio en las variables x y y. Similarmente, $2x^4y^2z^2 - 5x^2y + 3yz$ es un polinomio en las variables x, y y z. En estos casos el grado del polinomio se considera con respecto a cada una de las variables. Así, por ejemplo, el polinomio $x^2 + xy + y^3$ es de grado 2 con respecto a x y de grado 3 con respecto a y. De igual manera, el polinomio $2x^4y^2z^2 - 5x^2y + 3yz$ es de grado 4 con respecto a x, de grado 2 con respecto a y y de grado 2 con respecto a z.

Ejemplo 4.4

En los siguientes polinomios hallar el grado y el coeficiente numérico de cada término y el grado del polinomio.

1. $x^2 - 10^5$.
2. $x^2 + 3x^3 - 4$.
3. $y^3 - 3y^2 + 4y - 2$.
4. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$.
5. w.
6. $\dfrac{1}{5}$.

Solución

1. En el término x^2: el grado es 2 y el coeficiente numérico es 1.
   En el término -10^5: el grado es 0 y el coeficiente numérico es -10^5.
   Luego, el grado del polinomio es 2.
2. En el término x^2: el grado es 2 y el coeficiente numérico es 1.
   En el término $3x^3$: el grado es 3 y el coeficiente numérico es 3.
   En el término -4: el grado es 0 y el coeficiente numérico es -4.
   Por lo tanto, el grado del polinomio es 3.
3. En el término y^3: el grado es 3 y el coeficiente numérico es 1.
   En el término $-3y^2$: el grado es 2 y el coeficiente numérico es -3.
   En el término $4y$: el grado es 1 y el coeficiente numérico es 4.
   En el término -2: el grado es 0 y el coeficiente numérico es -2.
   Por lo tanto, el grado del polinomio es 3.
4. En el término 1: el grado es 0 y el coeficiente numérico es 1.
   En el término $2x$: el grado es 1 y el coeficiente numérico es 2.
   En el término $3x^2$: el grado es 2 y el coeficiente numérico es 3.
   En el término $4x^3$: el grado es 3 y el coeficiente numérico es 4.
   En el término $5x^4$: el grado es 4 y el coeficiente numérico es 5.
   Por lo tanto, el grado del polinomio es 4.
5. El grado de w es 1 y el coeficiente numérico es 1.
6. El grado de $\dfrac{1}{5}$ es 0. ¿Por qué? El coeficiente numérico es $\dfrac{1}{5}$.

Ejemplo 4.5

Hallar el grado de los siguientes polinomios con respecto a cada una de las variables.

1. $3 + x^2w - 2x^5y^7 + zw$.
2. $2x^3y + 4xyz^4$.
3. $xz^3 + 3x^2z^2 - 4x^3z + x^4$.

Solución

1. El grado de $3 + x^2w - 2x^5y^7 + zw$ es 5 con respecto a x, 7 con respecto a y, 1 con respecto a z y 1 con respecto a w.
2. El grado de $2x^3y + 4xyz^4$ es 3 con respecto a x, 1 con respecto a y y 4 con respecto a z.
3. El grado de $xz^3 + 3x^2z^2 - 4x^3z + x^4$ es 4 con respecto a x y 3 con respecto a z.

Ejercicios propuestos

En los siguientes polinomios hallar el grado y el coeficiente numérico de cada término y el grado del polinomio:

1. $x^7 - 7x^5 + 2x^4 - 6$.
2. $4z + 1$.
3. $-3x^3 + 5x^2 + \frac{1}{2}x$.
4. $-\frac{2}{3}$.
5. 0.

Respuestas

1. El grado de x^7 es 7 y el coeficiente numérico es 1.
   El grado de $-7x^5$ es 5 y el coeficiente numérico es -7.
   El grado de $2x^4$ es 4 y el coeficiente numérico es 2.
   El grado de -6 es 0 y el coeficiente numérico es -6.
   El grado del polinomio es 7.
2. El grado de $4z$ es 1 y el coeficiente numérico es 4.
   El grado de 1 es 0 y el coeficiente numérico es 1.
   El grado del polinomio es 1.
3. El grado de $-3x^3$ es 3 y el coeficiente numérico es -3.
   El grado de $5x^2$ es 2 y el coeficiente numérico es 5.
   El grado de $\frac{1}{2}x$ es 1 y el coeficiente numérico es $\frac{1}{2}$.
   El grado del polinomio es 3.
4. El grado de $-\frac{2}{3}$ es 0 y el coeficiente numérico es $-\frac{2}{3}$.
5. Al polinomio 0 no se le asigna ningún grado y el coeficiente numérico es 0.

Lección 5

Términos semejantes y símbolos de agrupación

En esta lección vamos a estudiar términos semejantes y símbolos de agrupación, conceptos cuya aplicación permite organizar las expresiones algebraicas, y en particular los polinomios, para realizar operaciones entre ellos.

Términos semejantes

En cada término de un polinomio, a las variables con sus exponentes se les conoce como **parte literal** del término. Por ejemplo, en el polinomio $-4x^2y^3 + 5xy^2 + 3$, la parte literal del término $-4x^2y^3$ es x^2y^3, la parte literal del término $5xy^2$ es xy^2 y para el último término 3, diremos que no tiene parte literal.

Decimos que dos o más términos son **términos semejantes** si tienen la misma parte literal. Así, por ejemplo, $7xy$ y $-3xy$ son términos semejantes, pero $-2w^2z^3$ y $5w^2z$ no lo son. Dos o más términos constantes se consideran semejantes.

Agrupar o reducir términos semejantes en un polinomio es convertir todos los términos semejantes en un solo término (semejante a ellos). El coeficiente de dicho término se obtiene realizando las sumas o restas de los coeficientes numéricos de los términos a reducir.

Para reducir términos semejantes y para realizar las operaciones fundamentales entre polinomios, aplicaremos las propiedades conmutativa y asociativa de la suma y el producto de números reales, y la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.

Ejemplo 5.1

Reducir términos semejantes en los siguientes polinomios:

1. $5y^2z + 8yz^2 - 21y^2z + 14yz^2$.
2. $-3x^3y^2 + 2x^2y^2 - x^3y^3 + 10x^3y^2 + 2x^3y^3 - 4x^3y^3$.

Solución

1. Observamos que los términos $5y^2z$ y $-21y^2z$ son semejantes y que $8yz^2$ y $14yz^2$ son semejantes. Por tanto,

$$\begin{aligned} 5y^2z + 8yz^2 - 21y^2z + 14yz^2 &= 5y^2z - 21y^2z + 8yz^2 + 14yz^2 && \text{Propiedad conmutativa de la suma} \\ &= (5-21)\,y^2z + (8+14)\,yz^2 && \text{Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma} \end{aligned}$$

$$= -16y^2z + 22yz^2.$$

2. Observamos que los términos $-3x^3y^2$ y $10x^3y^2$ son semejantes y los términos $-x^3y^3$, $2x^3y^3$ y $-4x^3y^3$ son semejantes. El término $2x^2y^2$ no es semejante con ningún otro en el polinomio. Luego,

$$\begin{aligned}
&-3x^3y^2 + 2x^2y^2 - x^3y^3 + 10x^3y^2 + 2x^3y^3 - 4x^3y^3 \\
&\qquad = -3x^3y^2 + 10x^3y^2 - x^3y^3 + 2x^3y^3 - 4x^3y^3 + 2x^2y^2 && \text{Propiedad conmutativa de la suma} \\
&\qquad = (-3+10)\,x^3y^2 + (-1+2-4)\,x^3y^3 + 2x^2y^2 && \text{Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma} \\
&\qquad = 7x^3y^2 - 3x^3y^3 + 2x^2y^2.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.2

Reducir los términos semejantes en los siguientes polinomios:

1. $3x - 11x + 2x$.
2. $6x - 3y + 4x + 5y$.
3. $4 + 7 - 8 - 5 + x$.
4. $2x^2 + 4x - 2x^2 - 5x$.
5. $2abc - 3abc + 12abc$.
6. $4ax^2 + 5a^2x - 2ax^2 + 5a^2x$.
7. $\frac{1}{2}yz^2 + \frac{4}{5}yz^2 - yz^2 - \frac{3}{4}yz^2$.

Solución

1. $3x - 11x + 2x = (3 - 11 + 2)x = -6x$.
2. $6x - 3y + 4x + 5y = 6x + 4x - 3y + 5y = (6 + 4)x + (-3 + 5)y = 10x + 2y$.
3. $4 + 7 - 8 - 5 + x = (4 + 7 - 8 - 5) + x = -2 + x$.
4. $2x^2 + 4x - 2x^2 - 5x = 2x^2 - 2x^2 + 4x - 5x = (2 - 2)x^2 + (4 - 5)x = 0x^2 - x = -x$.
5. $2abc - 3abc + 12abc = (2 - 3 + 12)abc = 11abc$.
6. $4ax^2 + 5a^2x - 2ax^2 + 5a^2x = 4ax^2 - 2ax^2 + 5a^2x + 5a^2x = (4 - 2)ax^2 + (5 + 5)a^2x = 2ax^2 + 10a^2x$.
7. $$\begin{aligned}
\frac{1}{2}yz^2 + \frac{4}{5}yz^2 - yz^2 - \frac{3}{4}yz &= \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{5} - 1\right) yz^2 - \frac{3}{4}yz \\
&= \left(\frac{5 + 8 - 10}{10}\right) yz^2 - \frac{3}{4}yz \\
&= \frac{3}{10}yz^2 - \frac{3}{4}yz.
\end{aligned}$$

Símbolos de agrupación

Son símbolos que se emplean para indicar que la expresión encerrada en ellos se considera como una sola cantidad. Usaremos paréntesis ( ), corchetes [ ] y llaves { }.

Para suprimir los símbolos de agrupación empleamos las siguientes reglas:

1. Si el signo $+$ precede a un símbolo de agrupación, este último se puede suprimir sin modificar el signo de los términos que contiene.

   Ejemplo 5.3

   Eliminar símbolos de agrupación y reducir términos semejantes en $(3x+7y)+(2x-5y)$.

   Solución

   $$(3x+7y)+(2x-5y) = 3x+7y+2x-5y = 5x+2y.$$

   Al quitar los paréntesis los signos no cambian puesto que el signo $+$ precede a cada uno de los dos paréntesis, ya que como dijimos antes, cuando no aparece el signo explícitamente, éste es $+$.

2. Si el signo $-$ precede a un símbolo de agrupación, este último se puede suprimir cambiando el signo de cada uno de los términos que contiene.

   Ejemplo 5.4

   Eliminar símbolos de agrupación y reducir términos semejantes en $(5ab-3c)-(2ab-7c)$.

   Solución

   $$(5ab-3c)-(2ab-7c) = 5ab-3c-2ab+7c = 3ab+4c,$$

   ya que el signo $-$ que precede a $2ab-7c$, cambia el signo $+$ de $2ab$ por el signo $-$, quedando $-2ab$ y el signo $-$ de $-7c$ por $+$, quedando $+7c$.

3. Si en una expresión aparecen varios símbolos de agrupación, unos contenidos en otros, para suprimirlos se sugiere empezar por el más interno.

   Ejemplo 5.5

   Eliminar símbolos de agrupación y reducir términos semejantes en

   $$2x - \{5x^2 - (7x+4x^2)\}.$$

   Solución

   $$\begin{aligned} 2x - \{5x^2 - (7x+4x^2)\} &= 2x - \{5x^2 - 7x - 4x^2\} && \text{Suprimimos los paréntesis} \\ &= 2x - 5x^2 + 7x + 4x^2 && \text{Suprimimos las llaves} \\ &= 9x - x^2 && \text{Agrupamos términos semejantes.} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.6

Simplificar los siguientes polinomios suprimiendo los símbolos de agrupación y agrupando términos semejantes:

1. $2m - [(m - n) - (m + n)]$.
2. $a + \{(-2a + b) - (-a + b - c) + a\}$.
3. $2x + [-5x - (-2y + \{-x + y\})]$.
4. $2a - (-4a + b) - \{-[-4a + (b - a) - (-b + a)]\}$.

Solución

1. $$\begin{aligned} 2m - [(m - n) - (m + n)] &= 2m - [m - n - m - n] && \text{Suprimimos los paréntesis internos} \\ &= 2m - [-2n] && \text{Reducimos términos semejantes} \\ &= 2m + 2n && \text{Suprimimos los corchetes.} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} a + \{(-2a + b) - (-a + b - c) + a\} &= a + \{-2a + b + a - b + c + a\} && \text{Suprimimos los paréntesis internos} \\ &= a - 2a + b + a - b + c + a && \text{Suprimimos las llaves} \\ &= a + c && \text{Reducimos términos semejantes.} \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 2x + [-5x - (-2y + \{-x + y\})] &= 2x + [-5x - (-2y - x + y)] && \text{Suprimimos las llaves internas} \\ &= 2x + [-5x + 2y + x - y] && \text{Eliminamos los paréntesis} \\ &= 2x - 5x + 2y + x - y && \text{Eliminamos los corchetes} \\ &= -2x + y && \text{Reducimos términos semejantes.} \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 2a - (-4a + b) - \{-[-4a + (b - a) - (-b + a)]\} &= 2a + 4a - b - \{-[-4a + b - a + b - a]\} \\ &= 6a - b - \{4a - b + a - b + a\} \\ &= 6a - b - 4a + b - a + b - a \\ &= b. \end{aligned}$$

   Justificar cada uno de los pasos.

Ejemplo 5.7

Eliminar símbolos de agrupación y agrupar términos semejantes en los siguientes polinomios:

1. $x - 3 - [2 - (x - y)]$.
2. $4x - \{3y + [4x - (3y - 4x) - 3y] - 4x\} - 3y$.
3. $7y + 3y - [5x - y - (3x - 2y) - y] - 2x$.
4. $4x^2 - \{3x^2 - [y - (x^2 - y)] + 4\}$.
5. $-\{-[-(a + b - c)]\} - \{+[-(c - a + b)]\} + [-\{-a + (-b)\}]$.

Solución

1. $$\begin{aligned} x-3-[2-(x-y)] &= x-3-[2-x+y] \\ &= x-3-2+x-y \\ &= 2x-y-5. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 4x-\{3y+[4x-(3y-4x)-3y]-4x\}-3y &= 4x-\{3y+[4x-3y+4x-3y]-4x\}-3y \\ &= 4x-\{3y+4x-3y+4x-3y-4x\}-3y \\ &= 4x-3y-4x+3y-4x+3y+4x-3y \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 7y+3y-[5x-y-(3x-2y)-y]-2x &= 7y+3y-[5x-y-3x+2y-y]-2x \\ &= 7y+3y-5x+y+3x-2y+y-2x \\ &= 10y-4x. \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 4x^2-\left\{3x^2-\left[y-\left(x^2-y\right)\right]+4\right\} &= 4x^2-\left\{3x^2-\left[y-x^2+y\right]+4\right\} \\ &= 4x^2-\left\{3x^2-y+x^2-y+4\right\} \\ &= 4x^2-3x^2+y-x^2+y-4 \\ &= 2y-4. \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} &-\{-[-(a+b-c)]\}-\{+[-(c-a+b)]\}+[-\{-a+(-b)\}] \\ &= -\{-[-a-b+c]\}-\{+[-c+a-b]\}+[-\{-a-b\}] \\ &= -\{a+b-c\}-\{-c+a-b\}+[a+b] \\ &= -a-b+c+c-a+b+a+b \\ &= -a+b+2c. \end{aligned}$$

Nota: Cuando queremos agrupar algunos términos en una expresión usando símbolos de agrupación, debemos tener en cuenta el signo que vamos a usar antes de dicho símbolo, por ejemplo,

$$4x^2-7x-8x^2+9x=\left(4x^2-8x^2\right)-(7x-9x)\,.$$

Ejercicios propuestos

I. Reducir términos semejantes en los siguientes polinomios:

1. $-6xyz+10xyz-3xyz$.
2. $2x^3-3x^3+12x^3$.
3. $w-5w+2w$.
4. $x+y-z-y-z+2z-x$.
5. $15x^2-6xy-8x^2+20-5xy-31+x^2-xy$.
6. $5y-3z^2-8w^3-5y-50+4z^2-65-z^2+90+w^3+7w^3$.

7. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+2x-3y-\frac{3}{4}x-\frac{1}{6}y+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$.

II. En los ejercicios siguientes, eliminar los símbolos de agrupación y luego reducir los términos semejantes:

1. $3a-(2b-3c)+(2a-c)$.
2. $4s-[2s-(3s-t)+2t]$.
3. $2x-\{3x+[4x-(x-2y)+3y]-4y\}+2y$.
4. $2a-\{2a-[2a-(2a-b)-b]-b\}-b$.
5. $3x-\{2x+[3x-2y-(5x-4y)-2x]-5y\}$.

Respuestas

I. 1. xyz.

2. $11x^3$.
3. $-2w$.
4. 0.
5. $8x^2-12xy-11$.
6. -25.
7. $\frac{7}{4}x-\frac{17}{6}y+\frac{1}{4}$.

II. 1. $5a-2b+2c$.

2. $5s-3t$.
3. $-4x+y$.
4. 0.
5. $5x+3y$.

Lección 6

Suma de polinomios

En esta lección estudiaremos cómo hallar la suma de dos o más polinomios.

Para sumar dos o más polinomios se encierra cada uno usando símbolos de agrupación, se escribe uno a continuación del otro separados por el signo +, se eliminan los símbolos de agrupación y se reducen términos semejantes.

Ejemplo 6.1

En cada numeral, hallar la suma de los polinomios dados.

1. $3x^2 + x + 1 \;\;,\;\; 2x^2 - 3x - 5.$
2. $9x - 3y + 5 \;\;,\;\; -x - y + 4 \;\;,\;\; -5x + 4y - 9.$
3. $ax - ay - az \;\;,\;\; -5ax - 7ay - 6az \;\;,\;\; 4ax + 9ay + 8az.$
4. $3x^2 + 7x - 9 \;\;,\;\; -5x^3 - \dfrac{1}{5}x^2 + x - 5.$
5. $x^4 - x^2y^2 \;\;,\;\; -5x^3y + 6xy^3, -4xy^3 + y^4 \;\;,\;\; -4x^2y^2 - 6.$

Solución

1. Encerramos cada polinomio entre paréntesis y los escribimos uno a continuación del otro separados por el signo +:

$$\begin{aligned}
&\left(3x^2 + x + 1\right) + \left(2x^2 - 3x - 5\right) \\
&\qquad = 3x^2 + x + 1 + 2x^2 - 3x - 5 && \text{Eliminamos paréntesis} \\
&\qquad = (3+2)\,x^2 + (1-3)\,x + (1-5) && \text{Agrupamos términos semejantes} \\
&\qquad = 5x^2 - 2x - 4 && \text{Realizamos operaciones con los coeficientes.}
\end{aligned}$$

2. Encerramos cada polinomio entre paréntesis y los escribimos uno a continuación del otro separados por el signo +:

$$\begin{aligned}
&(9x - 3y + 5) + (-x - y + 4) + (-5x + 4y - 9) \\
&\qquad = 9x - 3y + 5 - x - y + 4 - 5x + 4y - 9 && \text{Eliminamos paréntesis} \\
&\qquad = (9-1-5)\,x + (-3-1+4)\,y + (5+4-9) && \text{Agrupamos términos semejantes}
\end{aligned}$$

$$= 3x + 0y + 0$$ Realizamos operaciones con coeficientes

$$= 3x.$$

3. Encerramos cada polinomio entre paréntesis y los escribimos uno a continuación del otro separados por el signo +:

$$(ax - ay - az) + (-5ax - 7ay - 6az) + (4ax + 9ay + 8az)$$

$$= ax - ay - az - 5ax - 7ay - 6az + 4ax + 9ay + 8az$$ Eliminamos paréntesis

$$= (1 - 5 + 4)\,ax + (-1 - 7 + 9)\,ay + (-1 - 6 + 8)\,az$$ Agrupamos términos semejantes

$$= 0ax + 1ay + 1az$$ Realizamos operaciones con los coeficientes

$$= ay + az.$$

4. Encerramos cada polinomio entre paréntesis y los escribimos uno a continuación del otro separados por el signo +:

$$\left(3x^2 + 7x - 9\right) + \left(-5x^3 - \frac{1}{5}x^2 + x - 5\right)$$

$$= 3x^2 + 7x - 9 - 5x^3 - \frac{1}{5}x^2 + x - 5$$ Eliminamos paréntesis

$$= \left(3 - \frac{1}{5}\right)x^2 + (7 + 1)\,x + (-9 - 5) + \left(-5x^3\right)$$ Agrupamos términos semejantes

$$= \frac{3\,(5) - 1}{5}x^2 + 8x + (-14) + \left(-5x^3\right)$$ Realizamos operaciones con coeficientes

$$= \frac{14}{5}x^2 + 8x - 14 - 5x^3$$

$$= -5x^3 + \frac{14}{5}x^2 + 8x - 14$$ Ordenamos el polinomio resultante respecto a x.

5. Encerramos cada polinomio entre paréntesis y los escribimos uno a continuación del otro separados por el signo +:

$$\left(x^4 - x^2y^2\right) + \left(-5x^3y + 6xy^3\right) + \left(-4xy^3 + y^4\right) + \left(-4x^2y^2 - 6\right)$$

$$= x^4 - x^2y^2 - 5x^3y + 6xy^3 - 4xy^3 + y^4 - 4x^2y^2 - 6$$

$$= x^4 + (-1 - 4)\,x^2y^2 - 5x^3y + (6 - 4)\,xy^3 + y^4 - 6$$

$$= x^4 - 5x^2y^2 - 5x^3y + 2xy^3 + y^4 - 6$$

$$= x^4 - 5x^3y - 5x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 - 6.$$

En el siguiente ejemplo, justifique cada uno de los pasos de la solución dada.

Ejemplo 6.2

En cada numeral, hallar la suma de los polinomios dados.

1. $a^4 - b^4 \quad , \quad -a^3b + a^2b^2 - ab^3 \quad , \quad -3a^4 + 5a^3b - 4a^2b^2 \quad , \quad -4a^3b + 3a^2b^2 - 3b^4.$

2. $a^6 - a^4 + a^2 \quad , \quad \frac{3}{5}a^5 - \frac{3}{8}a^3 - \frac{1}{2}a \quad , \quad -\frac{3}{7}a^4 - \frac{5}{8}a^2 + 6 \quad , \quad -\frac{3}{8}a - 6.$

3. $x^4 + 2x^2y^2 + \frac{2}{7}y^4 \quad , \quad -\frac{5}{6}x^4 + \frac{3}{8}x^2y^2 - \frac{1}{6}xy^3 - \frac{1}{14}y^4 \quad , \quad -\frac{5}{6}xy^3 - \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{7}y^4.$

Solución

1. $$\begin{aligned}
&\left(a^4 - b^4\right) + \left(-a^3b + a^2b^2 - ab^3\right) + \left(-3a^4 + 5a^3b - 4a^2b^2\right) + \left(-4a^3b + 3a^2b^2 - 3b^4\right)\\
&\qquad = a^4 - b^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 - 3a^4 + 5a^3b - 4a^2b^2 - 4a^3b + 3a^2b^2 - 3b^4\\
&\qquad = -2a^4 - 4b^4 + 0a^3b + 0a^2b^2 - ab^3\\
&\qquad = -2a^4 - 4b^4 - ab^3.
\end{aligned}$$

2. $$\left(a^6 - a^4 + a^2\right) + \left(\frac{3}{5}a^5 - \frac{3}{8}a^3 - \frac{1}{2}a\right) + \left(-\frac{3}{7}a^4 - \frac{5}{8}a^2 + 6\right) + \left(-\frac{3}{8}a - 6\right)$$

$$= a^6 - a^4 + a^2 + \frac{3}{5}a^5 - \frac{3}{8}a^3 - \frac{1}{2}a - \frac{3}{7}a^4 - \frac{5}{8}a^2 + 6 - \frac{3}{8}a - 6$$

$$= a^6 + \left(-1 - \frac{3}{7}\right)a^4 + \left(1 - \frac{5}{8}\right)a^2 + \frac{3}{5}a^5 - \frac{3}{8}a^3 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right)a + (6 - 6)$$

$$= a^6 + \left(\frac{-7-3}{7}\right)a^4 + \left(\frac{8-5}{8}\right)a^2 + \frac{3}{5}a^5 - \frac{3}{8}a^3 + \left(\frac{-4-3}{8}\right)a + 0$$

$$= a^6 - \frac{10}{7}a^4 + \frac{3}{8}a^2 + \frac{3}{5}a^5 - \frac{3}{8}a^3 - \frac{7}{8}a$$

$$= a^6 + \frac{3}{5}a^5 - \frac{10}{7}a^4 - \frac{3}{8}a^3 + \frac{3}{8}a^2 - \frac{7}{8}a.$$

3. $$\left(x^4 + 2x^2y^2 + \frac{2}{7}y^4\right) + \left(-\frac{5}{6}x^4 + \frac{3}{8}x^2y^2 - \frac{1}{6}xy^3 - \frac{1}{14}y^4\right) + \left(-\frac{5}{6}xy^3 - \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{7}y^4\right)$$

$$= x^4 + 2x^2y^2 + \frac{2}{7}y^4 - \frac{5}{6}x^4 + \frac{3}{8}x^2y^2 - \frac{1}{6}xy^3 - \frac{1}{14}y^4 - \frac{5}{6}xy^3 - \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{7}y^4$$

$$= \left(1 - \frac{5}{6}\right)x^4 + \left(2 + \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right)x^2y^2 + \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{14} + \frac{1}{7}\right)y^4 + \left(-\frac{1}{6} - \frac{5}{6}\right)xy^3$$

$$= \frac{1}{6}x^4 + \frac{17}{8}x^2y^2 + \frac{5}{14}y^4 - xy^3$$

$$= \frac{1}{6}x^4 + \frac{17}{8}x^2y^2 - xy^3 + \frac{5}{14}y^4.$$

Ejercicios propuestos

Hallar la suma de los siguientes polinomios:

1. $x^3 - 4x + 5 \quad , \quad x^3 - 2x^2 + 6 \quad , \quad x^2 - 7x + 4.$
2. $a^3 + b^3 \quad , \quad -3a^2b + 8ab^2 - b^3 \quad , \quad -5a^3 - 6ab^2 + 8 \quad , \quad 3a^2b - 2b^3.$
3. $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \quad , \quad -\frac{2}{5}xy + \frac{1}{6}y^2 \quad , \quad \frac{1}{10}xy + \frac{1}{3}y^2.$
4. $\frac{9}{17}m^2 + \frac{25}{34}n^2 - \frac{1}{4} \quad , \quad -15mn + \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{5}{17}n^2 + \frac{7}{34}m^2 - \frac{1}{4} \quad , \quad -\frac{7}{34}m^2 - 30mn + 3.$

Respuestas

1. $2x^3 - x^2 - 11x + 15.$
2. $-4a^3 + 2ab^2 - 2b^3 + 8.$
3. $\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{10}xy.$
4. $\frac{9}{17}m^2 - 45mn + \frac{35}{34}n^2 + 3.$

Lección 7

Resta de polinomios

En esta lección estudiaremos cómo hallar la resta de dos polinomios.

Recordemos que en la expresión $a - b$, a se llama **minuendo** y b **sustraendo**.

Para restar dos polinomios se encierra cada uno usando un símbolo de agrupación, se escribe primero el minuendo y a continuación el sustraendo precedido del signo $-$. Luego se eliminan los símbolos de agrupación y se reducen términos semejantes.

Ejemplo 7.1

1. De $x + y - z$ restar $-x - y + z$.
2. De $3x^2 + x + 1$ restar $2x^2 - 3x - 5$.
3. Restar $25x + 25x^3 - 18x^2 - 11x^5 - 46$ de $x^3 + 8x^2 - 9 + 15x$.
4. Restar $-8xy^3 - 6x^2y^2 + 20y^4$ de $x^4 + 9xy^3 - 11y^4$.
5. De $y^5 - 9y^3 + 6y^2 - 31$ restar $-11y^4 + 31y^3 - 8y^2 - 19y$.

Solución

1. Escribimos el minuendo y a continuación el sustraendo precedido del signo $-$:

$$\begin{aligned}(x + y - z) - (-x - y + z) &= x + y - z + x + y - z && \text{Eliminamos los paréntesis}\\ &= 2x + 2y - 2z && \text{Agrupamos términos semejantes.}\end{aligned}$$

2. Escribimos el minuendo y a continuación el sustraendo precedido del signo $-$:

$$\begin{aligned}&(3x^2 + x + 1) - \big(2x^2 - 3x - 5\big)\\ &\qquad = 3x^2 + x + 1 - 2x^2 + 3x + 5 && \text{Eliminamos paréntesis}\\ &\qquad = (3 - 2)\,x^2 + (1 + 3)\,x + (1 + 5) && \text{Agrupamos términos semejantes}\\ &\qquad = x^2 + 4x + 6 && \text{Realizamos operaciones con los coeficientes.}\end{aligned}$$

3. De acuerdo con el enunciado, el minuendo es $x^3 + 8x^2 - 9 + 15x$ y el sustraendo es $25x + 25x^3 - 18x^2 - 11x^5 - 46$. Escribimos entonces el minuendo y luego el sustraendo precedido del signo $-$:

$$\big(x^3 + 8x^2 - 9 + 15x\big) - \big(25x + 25x^3 - 18x^2 - 11x^5 - 46\big)$$

$= x^3 + 8x^2 - 9 + 15x - 25x - 25x^3 + 18x^2 + 11x^5 + 46$ Eliminamos paréntesis

$= (1 - 25)\, x^3 + (8 + 18)\, x^2 + (-9 + 46) + (15 - 25)x + 11x^5$ Agrupamos términos semejantes

$= -24x^3 + 26x^2 + 37 - 10x + 11x^5$ Realizamos operaciones con coeficientes

$= 11x^5 - 24x^3 + 26x^2 - 10x + 37$ Organizamos el polinomio resultante.

4. Escribimos el minuendo y a continuación el sustraendo precedido del signo $-$:

$(x^4 + 9xy^3 - 11y^4) - \left(-8xy^3 - 6x^2y^2 + 20y^4\right)$

$= x^4 + 9xy^3 - 11y^4 + 8xy^3 + 6x^2y^2 - 20y^4$ Eliminamos paréntesis

$= x^4 + (9 + 8)xy^3 - (11 + 20)y^4 + 6x^2y^2$ Agrupamos términos semejantes

$= x^4 + 17xy^3 - 31y^4 + 6x^2y^2$ Realizamos operaciones con coeficientes

$= x^4 + 6x^2y^2 + 17xy^3 - 31y^4$ Organizamos el polinomio con respecto a x.

5. Escribimos el minuendo y a continuación el sustraendo precedido del signo $-$:

$\left(y^5 - 9y^3 + 6y^2 - 31\right) - \left(-11y^4 + 31y^3 - 8y^2 - 19y\right)$

$= y^5 - 9y^3 + 6y^2 - 31 + 11y^4 - 31y^3 + 8y^2 + 19y$ Eliminamos los paréntesis

$= y^5 - 40y^3 + 14y^2 - 31 + 11y^4 + 19y$ Agrupamos términos semejantes

$= y^5 + 11y^4 - 40y^3 + 14y^2 + 19y - 31$ Organizamos con respecto a y.

En el siguiente ejemplo, justifique cada uno de los pasos de la solución dada.

Ejemplo 7.2

1. Restar $\frac{7}{9}x^2y$ de $x^3 + \frac{2}{3}x^2y - 6$.
2. Restar $-\frac{7}{8}a^2 + \frac{9}{10}a + \frac{7}{8}$ de $a^3 + \frac{1}{2}a^2 - a + \frac{5}{6}$.
3. Restar $-m^4 + \frac{7}{8}m^2n^2 - \frac{2}{9}mn^3$ de $\frac{2}{11}m^3n + \frac{5}{14}m^2n^2 + \frac{1}{3}mn^3 - 6$.
4. De la suma de $\frac{1}{2}a - \frac{2}{9}b$ con $\frac{1}{3}b - \frac{3}{5}c$ restar la suma de $\frac{2}{3}b + \frac{1}{5}c$ con $-\frac{1}{10}c - \frac{5}{9}b$.

Solución

1. $x^3 + \frac{2}{3}x^2y - 6 - \frac{7}{9}x^2y = x^3 + \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{9}\right) x^2y - 6$

$$= x^3 - \frac{1}{9}x^2y - 6.$$

2. $a^3+\frac{1}{2}a^2-a+\frac{5}{6}-\left(-\frac{7}{8}a^2+\frac{9}{10}a+\frac{7}{8}\right)=a^3+\frac{1}{2}a^2-a+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}a^2-\frac{9}{10}a-\frac{7}{8}$

$$=a^3+\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{8}\right)a^2-\left(1+\frac{9}{10}\right)a+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{8}\right)$$

$$=a^3+\left(\frac{4+7}{8}\right)a^2-\left(\frac{10+9}{10}\right)a+\left(\frac{20-21}{24}\right)$$

$$=a^3+\frac{11}{8}a^2-\frac{19}{10}a-\frac{1}{24}.$$

3. $\frac{2}{11}m^3n+\frac{5}{14}m^2n^2+\frac{1}{3}mn^3-6-\left(-m^4+\frac{7}{8}m^2n^2-\frac{2}{9}mn^3\right)$

$$=\frac{2}{11}m^3n+\frac{5}{14}m^2n^2+\frac{1}{3}mn^3-6+m^4-\frac{7}{8}m^2n^2+\frac{2}{9}mn^3$$

$$=\frac{2}{11}m^3n+\left(\frac{5}{14}-\frac{7}{8}\right)m^2n^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\right)mn^3-6+m^4$$

$$=\frac{2}{11}m^3n-\frac{29}{56}m^2n^2+\frac{5}{9}mn^3-6+m^4$$

$$=m^4+\frac{2}{11}m^3n-\frac{29}{56}m^2n^2+\frac{5}{9}mn^3-6.$$

4. $\left[\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{9}b\right)+\left(\frac{1}{3}b-\frac{3}{5}c\right)\right]-\left[\left(\frac{2}{3}b+\frac{1}{5}c\right)+\left(-\frac{1}{10}c-\frac{5}{9}b\right)\right]$

$$=\left[\frac{1}{2}a-\frac{2}{9}b+\frac{1}{3}b-\frac{3}{5}c\right]-\left[\frac{2}{3}b+\frac{1}{5}c-\frac{1}{10}c-\frac{5}{9}b\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2}a+\left(-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\right)b-\frac{3}{5}c\right]-\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)b+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)c\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2}a+\frac{1}{9}b-\frac{3}{5}c\right]-\left[\frac{1}{9}b+\frac{1}{10}c\right]$$

$$=\frac{1}{2}a+\frac{1}{9}b-\frac{3}{5}c-\frac{1}{9}b-\frac{1}{10}c$$

$$=\frac{1}{2}a-\frac{7}{10}c.$$

Ejercicios propuestos

1. Restar $x^2y+7xy^2-3y^3$ de x^3-1.
2. De $\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b$ restar $\frac{4}{5}a+\frac{2}{9}b-\frac{1}{2}$.

3. Restar $5 - m^4$ de la suma de $-5m^2 + 4m^3 - 2m$ con $-7m^3 + 8m + 4$.
4. De la suma de $\frac{7}{12}a^4$ con $-\frac{3}{7}a^3 + \frac{2}{5}a^2 - 6$ restar $\frac{1}{5}a - \frac{1}{3} - \frac{3}{4}a^4$.
5. ¿De qué polinomio se restó $a^3 - b^3$ si el resultado obtenido fue $4a^3 + 8ab^2 - 11$?

Respuestas

1. $x^3 - x^2y - 7xy^2 + 3y^3 - 1$.
2. $-\frac{3}{10}a - \frac{8}{9}b + \frac{1}{2}$.
3. $m^4 - 3m^3 - 5m^2 + 6m - 1$.
4. $\frac{4}{3}a^4 - \frac{3}{7}a^3 + \frac{2}{5}a^2 - \frac{1}{5}a - \frac{17}{3}$.
5. De $5a^3 + 8ab^2 - b^3 - 11$.

Lección 8

Multiplicación de polinomios

En esta lección estudiaremos cómo hallar el producto de dos o más polinomios y diferentes formas de expresar esta operación.

La multiplicación o producto de a y b se escribe a x b, $a \cdot b$, o simplemente ab. a y b se llaman **factores** del producto ab.

Para multiplicar polinomios usaremos las propiedades **conmutativa**, **asociativa**, **distributiva** del producto con respecto a la suma, las **leyes de exponentes** y la **ley de signos** que enunciamos a continuación.

Ley de signos

El signo del producto depende de los signos de los factores, así:

Si los dos factores tienen el mismo signo, el signo del producto es $+$, es decir,

$$\begin{array}{rcll} (+)\,(+) & = & + & (+ \text{ por } + \text{ da } +) \\ (-)\,(-) & = & + & (- \text{ por } - \text{ da } +). \end{array}$$

Si los dos factores tienen signo diferente, el signo del producto es $-$, es decir,

$$\begin{array}{rcll} (+)\,(-) & = & - & (+ \text{ por } - \text{ da } -) \\ (-)\,(+) & = & - & (- \text{ por } + \text{ da } -). \end{array}$$

Ejemplo 8.1

$$\begin{array}{cccc} (-2)\,z = -2z & \dfrac{1}{5}(-w) = -\dfrac{1}{5}w & (-7)\,(-5) = 35 & b\,(-c) = -bc \\ (-d)\,(-w) = dw & 5\,(-3) = -15 & (-a)\,c = -ac & (-2)4 = -8. \end{array}$$

Veamos un ejemplo en el que además de la ley de signos, utilicemos las leyes de exponentes que vimos anteriormente.

Ejemplo 8.2

1. $b^5 \cdot b^3 = \underbrace{bbbbb}_{5 \text{ veces}} \cdot \underbrace{bbb}_{3 \text{ veces}} = \underbrace{bbbbbbbb}_{8 \text{ veces}} = b^8.$
2. $z^3 z^6 = z^9$, ya que $3 + 6 = 9$.
3. $(x+y)^2\,(x+y)^{13} = (x+y)^{15}$, ya que $2 + 13 = 15$.

4. $(-m^5)(m^7) = -m^{12}$, ya que $-$ por $+$ da $-$ y $5 + 7 = 12$.

5. $(2z^3)^4 = 2^{1\text{x}4} z^{3\text{x}4} = 16z^{12}$, ya que $2^{1\text{x}4} = 16$ y $3\text{x}4 = 12$.

Ejemplo 8.3

Efectuar las operaciones indicadas, eliminando símbolos de agrupación y reduciendo términos semejantes:

1. $(3y^3)(2y^2)$.
2. $(2x^2y^3)(3xz^2)(5y)$.
3. $(2a^2b^3)^3$.
4. $2x(x + 2y) - 3y(2x - y) + xy(2 - y)$.
5. $2x^2 - 3x[2x - y(x - 2y) - y^2]$.
6. $(3x^2 - 4y^2)(x^3 - 2x^2y + xy^2)$.
7. $(x^2 - xy - y^2)(x^2 + xy + y^2)$.

Solución

1. $(3y^3)(2y^2) = 6y^5$.

2. $(2x^2y^3)(3xz^2)(5y) = (2x^2y^3)(15xyz^2) = 30x^3y^4z^2$.

   Por las leyes asociativa y conmutativa de la multiplicación, se pueden efectuar todas las operaciones simultáneamente:

   $(2x^2y^3)(3xz^2)(5y) = (2\text{x}3\text{x}5)x^{(2+1)}y^{(3+1)}z^2 = 30x^3y^4z^2$.

3. $(2a^2b^3)^3 = 2^3(a^2)^3(b^3)^3 = 8a^6b^9$.

4. $2x(x+2y)-3y(2x-y)+xy(2-y) = 2x^2+4xy-6xy+3y^2+2xy-xy^2 = 2x^2+3y^2-xy^2$.

5. $$\begin{aligned} 2x^2 - 3x[2x - y(x - 2y) - y^2] &= 2x^2 - 3x[2x - xy + 2y^2 - y^2] \\ &= 2x^2 - 6x^2 + 3x^2y - 6xy^2 + 3xy^2 \\ &= -4x^2 + 3x^2y - 3xy^2. \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} (3x^2 - 4y^2)(x^3 - 2x^2y + xy^2) &= 3x^2(x^3 - 2x^2y + xy^2) - 4y^2(x^3 - 2x^2y + xy^2) \\ &= 3x^2(x^3) + 3x^2(-2x^2y) + 3x^2(xy^2) + (-4y^2)(x^3) \\ &\quad + (-4y^2)(-2x^2y) + (-4y^2)(xy^2) \\ &= 3x^5 - 6x^4y + 3x^3y^2 - 4y^2x^3 + 8x^2y^3 - 4xy^4 \\ &= 3x^5 - 6x^4y - x^3y^2 + 8x^2y^3 - 4xy^4. \end{aligned}$$

   Otra forma de expresar esta operación es la siguiente:

$x^3 - 2x^2y + xy^2$ $3x^2 - 4y^2$	Escribimos primero el polinomio con más términos, ordenado respecto a una de las variables. En el renglón siguiente escribimos el otro polinomio ordenado respecto a la misma variable del primero.
$3x^5 - 6x^4y + 3x^3y^2$	Multiplicamos el primer término del segundo polinomio por cada uno de los términos del primero.
$-4x^3y^2 + 8x^2y^3 - 4xy^4$	Multiplicamos el segundo término del segundo polinomio por cada uno de los términos del primero.
$3x^5 - 6x^4y - x^3y^2 + 8x^2y^3 - 4xy^4$	Sumamos los resultados, reduciendo términos semejantes.

Luego, $(x^3 - 2x^2y + xy^2)(3x^2 - 4y^2) = 3x^5 - 6x^4y - x^3y^2 + 8x^2y^3 - 4xy^4$.

Nótese que cuando se hace la multiplicación del segundo término por cada uno de los términos del primero, los resultados se van escribiendo teniendo en cuenta los términos semejantes.

7.

$$\begin{array}{ccccc}
x^2 & -xy & -y^2 & & \\
x^2 & +xy & +y^2 & & \\
\hline
x^4 & -x^3y & -x^2y^2 & & \\
 & x^3y & -x^2y^2 & -xy^3 & \\
 & & x^2y^2 & -xy^3 & -y^4 \\
\hline
x^4 & & -x^2y^2 & -2xy^3 & -y^4
\end{array}$$

Luego, $(x^2 - xy - y^2)(x^2 + xy + y^2) = x^4 - x^2y^2 - 2xy^3 - y^4$.

Ejemplo 8.4

1. Multiplicar $\frac{5}{6}a^2b^3$ por $-\frac{3}{10}ab^2c$.

2. Simplificar $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)\left(-\frac{3}{5}xy^2\right)\left(-\frac{10}{3}x^3\right)\left(-\frac{3}{4}x^2y\right)$.

3. Multiplicar $y^2 - 2y + 1$ por $y^4 - 2y^2 + 2$.

4. Multiplicar $\frac{1}{4}a^2 - ab + \frac{2}{3}b^2$ por $\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b$.

Solución

1. $$\begin{aligned}\left(\frac{5}{6}a^2b^3\right)\left(-\frac{3}{10}ab^2c\right) &= \frac{5}{6}\left(-\frac{3}{10}\right)a^{2+1}b^{3+2}c\\ &= -\frac{1}{4}a^3b^5c.\end{aligned}$$

2. $$\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)\left(-\frac{3}{5}xy^2\right)\left(-\frac{10}{3}x^3\right)\left(-\frac{3}{4}x^2y\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{10}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)x^{2+1+3+2}y^{1+2+1}$$
$$=\frac{3}{4}x^8y^4.$$

3. $$\begin{aligned}\left(y^2-2y+1\right)\left(y^4-2y^2+2\right)&=y^2\left(y^4-2y^2+2\right)-2y\left(y^4-2y^2+2\right)+1\left(y^4-2y^2+2\right)\\&=y^2\left(y^4\right)+y^2\left(-2y^2\right)+y^2\left(2\right)-2y\left(y^4\right)\\&\quad-2y\left(-2y^2\right)-2y\left(2\right)+y^4-2y^2+2\\&=y^6-2y^4+2y^2-2y^5+4y^3-4y+y^4-2y^2+2\\&=y^6-y^4+0y^2-2y^5+4y^3-4y+2\\&=y^6-2y^5-y^4+4y^3-4y+2.\end{aligned}$$

Otra forma de expresar esta operación es la siguiente:

$$\begin{array}{cccccccc}
y^4 & & -2y^2 & & +2 & & & \\
y^2 & & -2y & & +1 & & & \\
\hline
y^6 & & -2y^4 & & +2y^2 & & & \\
 & -2y^5 & & +4y^3 & & & -4y & \\
 & & y^4 & & -2y^2 & & & +2 \\
\hline
y^6 & -2y^5 & -y^4 & +4y^3 & & & -4y & +2
\end{array}$$

4. $$\left(\frac{1}{4}a^2-ab+\frac{2}{3}b^2\right)\left(\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b\right)$$
$$\begin{aligned}&=\frac{1}{4}a^2\left(\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b\right)-ab\left(\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b\right)+\frac{2}{3}b^2\left(\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b\right)\\&=\frac{1}{4}a^2\left(\frac{1}{4}a\right)+\frac{1}{4}a^2\left(-\frac{3}{2}b\right)-ab\left(\frac{1}{4}a\right)-ab\left(-\frac{3}{2}b\right)+\frac{2}{3}b^2\left(\frac{1}{4}a\right)+\frac{2}{3}b^2\left(-\frac{3}{2}b\right)\\&=\frac{1}{16}a^3-\frac{3}{8}a^2b-\frac{1}{4}a^2b+\frac{3}{2}ab^2+\frac{1}{6}b^2a-b^3\\&=\frac{1}{16}a^3+\left(-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\right)a^2b+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\right)ab^2-b^3\\&=\frac{1}{16}a^3-\frac{5}{8}a^2b+\frac{5}{3}ab^2-b^3.\end{aligned}$$

Otra forma de expresar esta operación es la siguiente:

$$
\begin{array}{cccc}
\frac{1}{4}a^2 & -ab & +\frac{2}{3}b^2 & \\
\frac{1}{4}a & -\frac{3}{2}b & & \\
\hline
\frac{1}{16}a^3 & -\frac{1}{4}a^2b & +\frac{1}{6}ab^2 & \\
 & -\frac{3}{8}a^2b & +\frac{3}{2}ab^2 & -b^3 \\
\hline
\frac{1}{16}a^3 & -\frac{5}{8}a^2b & +\frac{5}{3}ab^2 & -b^3
\end{array}
$$

Ejercicios propuestos

En los siguientes ejercicios efectuar las multiplicaciones indicadas y simplificar el resultado:

1. $(a^8 - a^6b^2 + a^4b^4 - 3a^2b^6 + b^8)\,(-5a^3b^2)$.
2. $(x^4 - 3x^3y + 2x^2y^2 + xy^3)\,(-y^2 - xy - x^2)$.
3. $(a^3 - a + a^2 + 1)\,(a^2 + a^3 - 2a - 1)$.
4. $3x(x^2 - 2x + 1)(x - 1)(x + 1)$.

Respuestas

1. $-5a^{11}b^2 + 5a^9b^4 - 5a^7b^6 + 15a^5b^8 - 5a^3b^{10}$.
2. $-x^6 + 2x^5y - 3x^2y^4 - xy^5$.
3. $a^6 + 2a^5 - 2a^4 - 3a^3 + 2a^2 - a - 1$.
4. $3x^5 - 6x^4 + 6x^2 - 3x$.

Lección 9

Productos notables

En esta lección vamos a considerar algunas multiplicaciones que se presentan frecuentemente en la solución de ejercicios y que, por su forma especial, se memorizan fácilmente y permiten realizar algunos productos en forma abreviada.

Realicemos las siguientes multiplicaciones:

1. $(a+b)(a-b)$.
2. $(a+b)^2$.
3. $(a-b)^2$.
4. $(a+b)^3$.
5. $(a-b)^3$.
6. $(x+a)(x+b)$.

Solución

1. $$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a \cdot a + a(-b) + b \cdot a + b(-b)\\ &= a^2 - ab + ab - b^2\\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a \cdot a + a(-b) + (-b)a + (-b)(-b)\\ &= a^2 - ab - ba + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a\cdot a^2 + a(2ab) + a\cdot b^2 + b\cdot a^2 + b(2ab) + b\cdot b^2\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2\\ &= (a-b)(a^2-2ab+b^2)\\ &= a\cdot a^2 + a(-2ab) + a\cdot b^2 + (-b)a^2 + (-b)(-2ab) + (-b)b^2\\ &= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x\cdot x + x\cdot b + a\cdot x + a\cdot b\\ &= x^2+bx+ax+ab\\ &= x^2+(a+b)x+ab.\end{aligned}$$

Estos productos, que presentamos en la siguiente tabla, son conocidos como **Productos Notables**. Se usan frecuentemente y simplifican las operaciones que los involucran, por lo que es recomendable memorizarlos, lo cual se logra con la práctica.

Suma por diferencia de dos expresiones	$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
Cuadrado de una suma	$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
Cuadrado de una diferencia	$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
Cubo de una suma	$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
Cubo de una diferencia	$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
Producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$	$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab.$

Observación:

Si a y b son números positivos, los productos anteriores se pueden representar geométricamente en términos de áreas o volúmenes de figuras conocidas. Por ejemplo, el cuadrado de una suma puede interpretarse en términos de sumas de áreas de cuadrados y rectángulos así: Construyamos un cuadrado de lado $a+b$, cuya área es $(a+b)^2$. Este cuadrado se puede descomponer en un cuadrado de área a^2, un cuadrado de área b^2 y dos rectángulos de área ab cada uno.

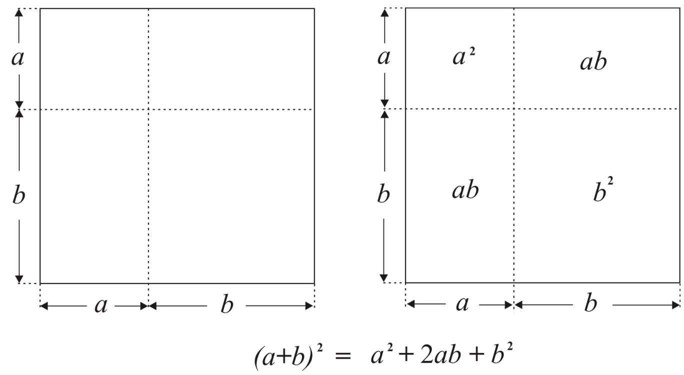

Figura 9.1

Ejemplo 9.1

Utilizar los productos notables para realizar las siguientes operaciones:

1. $(x-5)^2$.
2. $(a^2-b)(a^2+b)$.
3. $(1-2y)^3$.
4. $(x+y+z)(x-y-z)$.
5. $(x-5)(x+4)$.
6. $(x^5-2)(x^5-7)$.

Solución

1. $(x-5)^2$ es el cuadrado de una diferencia. Luego,

$$\begin{aligned}(x-5)^2 &= x^2 - 2x(5) + 5^2\\ &= x^2 - 10x + 25.\end{aligned}$$

2. $(a^2-b)(a^2+b)$ es el producto de la suma por la diferencia de dos términos. Así,

$$\begin{aligned}\left(a^2-b\right)\left(a^2+b\right) &= \left(a^2\right)^2 - (b)^2\\ &= a^4 - b^2.\end{aligned}$$

3. $(1-2y)^3$ es el cubo de una diferencia $a-b$, con $a=1$ y $b=2y$. Luego,

$$\begin{aligned}(1-2y)^3 &= 1^3 - 3\,(1)^2\,(2y) + 3\,(1)\,(2y)^2 - (2y)^3\\ &= 1 - 6y + 12y^2 - 8y^3\end{aligned}$$

4. Reagrupando de manera apropiada los términos de cada paréntesis podemos obtener la suma por diferencia de dos expresiones:

$$\begin{aligned}(x+y+z)(x-y-z) &= [x+(y+z)][x-(y+z)]\\ &= x^2 - (y+z)^2\\ &= x^2 - y^2 - 2yz - z^2.\end{aligned}$$

5. $(x-5)(x+4)$ es un producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ con $a=-5$ y $b=4$. Luego,

$$\begin{aligned}(x-5)(x+4) &= x^2+(-5+4)x+(-5)(4)\\ &= x^2-x-20.\end{aligned}$$

6. Estamos en el mismo caso del ejemplo anterior con $a=-2$ y $b=-7$ y además el primer término de cada binomio es x^5 en lugar de x. Luego,

$$\begin{aligned}(x^5-2)(x^5-7) &= (x^5)^2+(-2-7)x^5+(-2)(-7)\\ &= x^{10}-9x^5+14.\end{aligned}$$

Ejemplo 9.2

Efectuar las operaciones indicadas, utilizando los productos notables:

1. $(3ab-5x^2)^2$.
2. $[(x^2+3)+x][(x^2+3)-x]$.
3. $(1-4ax)^3$.
4. $(x^3+6)(x^3-8)$.
5. $(a+2)(a-3)(a-2)(a+3)$.

Solución

1. $$\begin{aligned}\left(3ab-5x^2\right)^2 &= (3ab)^2-2\,(3ab)\left(5x^2\right)+\left(5x^2\right)^2\\ &= 9a^2b^2-30abx^2+25x^4.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}[\left(x^2+3\right)+x][\left(x^2+3\right)-x] &= \left(x^2+3\right)^2-x^2\\ &= x^4+6x^2+9-x^2\\ &= x^4+5x^2+9.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}(1-4ax)^3 &= 1^3-3\,(1)^2\,(4ax)+3\,(1)\,(4ax)^2-(4ax)^3\\ &= 1-12ax+48a^2x^2-64a^3x^3.\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\left(x^3+6\right)\left(x^3-8\right) &= \left(x^3\right)^2+(6-8)\,x^3+6\,(-8)\\ &= x^6-2x^3-48.\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}(a+2)\,(a-3)\,(a-2)\,(a+3) &= [(a+2)\,(a-2)][(a-3)\,(a+3)]\\ &= [a^2-4][a^2-9]\\ &= \left(a^2\right)^2+(-4-9)\,a^2+(-4)\,(-9)\\ &= a^4-13a^2+36.\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

Efectuar las siguientes operaciones usando los productos notables:

1. $(1-a)(a+1)$.
2. $(a^2+8)(a^2-7)$.
3. $(a+b-1)(a+b+1)$.
4. $(2a^3-5b^4)^2$.
5. $(2a+x)^3$.
6. $(1-a+b)(b-a-1)$.

Respuestas

1. $1-a^2$.
2. a^4+a^2-56.
3. $a^2+2ab+b^2-1$.
4. $4a^6-20a^3b^4+25b^8$.
5. $8a^3+12a^2x+6ax^2+x^3$.
6. $a^2-2ab+b^2-1$.

Lección 10

División de polinomios I

En esta lección vamos a estudiar la división de polinomios en la misma variable. Inicialmente trabajaremos la división entre monomios y la división de un polinomio con dos o más términos por un monomio.

La división de a entre b, con $b \neq 0$, se escribe $a \div b$, a/b ó $\dfrac{a}{b}$; a se llama **dividendo** y b **divisor**. Recordemos que

$$\frac{a}{b} = c \qquad \text{significa} \qquad a = b \cdot c.$$

El divisor debe ser diferente de cero, para que la división tenga sentido[1].

La división de polinomios guarda muchas semejanzas con la división entre números enteros. A continuación nos referiremos brevemente a esta operación entre enteros.

Como sabemos, dividir un entero positivo a entre un entero positivo b, con a mayor que b, consiste en encontrar el número de veces que b "está" o "cabe" en a. Se presentan dos situaciones que ilustramos en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 10.1

$$\begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 3 \end{array}$$

El cociente es 3 y el residuo es 2. Es decir, 5 "está" 3 veces en el 17 y sobran 2:

$$17 = 5 \cdot 3 + 2 \qquad \text{o} \qquad \frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}.$$

La división no es exacta.

Ejemplo 10.2

$$\begin{array}{r|l} 120 & 8 \\ \cline{2-2} 40 & 15 \\ 0 & \end{array}$$

[1]Obsérvese que si, por ejemplo, $\dfrac{4}{0}$ fuese algún número c entonces se tendría $4 = 0 \cdot c$, es decir se tendría $4 = 0$, lo cual es falso.

El cociente es 15 y el residuo es 0. Es decir, 8 “está” exactamente 15 veces en el 120:

$$120 = 8 \cdot 15 \qquad \text{o} \qquad \frac{120}{8} = 15.$$

La división es exacta.

Consideremos ahora dos polinomios a y b, $b \neq 0$, en la misma variable y con el grado de a mayor o igual que el grado de b.

De manera similar a lo que ocurre en los enteros, dividir el polinomio a entre el polinomio b, consiste en hallar un polinomio c (el **cociente**) y un polinomio r (el **residuo**) de modo que

$$\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b} \qquad \text{o} \qquad a = b \cdot c + r.$$

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r & \text{c} \end{array}$$

con $r = 0$ o el grado de r menor que el grado de b. Cuando $r = 0$, la división es **exacta**.

Para dividir polinomios usaremos, entre otras, las leyes de los exponentes y la siguiente ley de signos para la división, la cual es similar a la que usamos para la multiplicación:

$$\begin{aligned} +/+ &= \;+ \qquad && (+ \text{ dividido } + \text{ da } +) \\ -/- &= \;+ \qquad && (- \text{ dividido } - \text{ da } +) \\ (+)\,/\,(-) &= \;- \qquad && (+ \text{ dividido } - \text{ da } -) \\ (-)\,/\,(+) &= \;- \qquad && (- \text{ dividido } + \text{ da } -)\,. \end{aligned}$$

División de monomios

Para dividir un monomio por otro monomio usamos la ley de signos para la división y la ley 2. de exponentes:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ para } m \text{ y } n \text{ enteros, } a \neq 0.$$

Ejemplo 10.3

Realizar las operaciones y simplificar el resultado expresándolo con exponentes positivos.

1. $10x^8 \div 2x^2$.
2. $3b^7 \div 12b^4$.
3. $\dfrac{5}{3}y^{11} \div y^3$.
4. $5m^5 \div 2m^3$.
5. $4z^4 \div 2z^4$.

Solución

1. $10x^8 \div 2x^2 = \dfrac{10x^8}{2x^2} = 5x^{8-2} = 5x^6.$

2. $3b^7 \div 12b^4 = \dfrac{3b^7}{12b^4} = \dfrac{3}{12}b^{7-4} = \dfrac{1}{4}b^3.$

3. $\dfrac{5}{3}y^{11} \div y^3 = \dfrac{\frac{5}{3}y^{11}}{y^3} = \dfrac{5}{3}y^{11-3} = \dfrac{5}{3}y^8.$

4. $5m^5 \div 2m^3 = \dfrac{5m^5}{2m^3} = \dfrac{5}{2}m^{5-3} = \dfrac{5}{2}m^2.$

5. $4z^4 \div 2z^4 = \dfrac{4z^4}{2z^4} = \dfrac{4}{2}z^{4-4} = 2z^0 = 2.$

División de un polinomio por un monomio

El resultado de dividir un polinomio, con dos o más términos, por un monomio, es la suma de los resultados de la división de cada término del polinomio por el monomio.

Ejemplo 10.4

1. $\dfrac{20x^{12} - 16x^8 - 8x^5}{4x^4} = \dfrac{20x^{12}}{4x^4} - \dfrac{16x^8}{4x^4} - \dfrac{8x^5}{4x^4} = 5x^8 - 4x^4 - 2x.$

   El cociente es $5x^8 - 4x^4 - 2x$ y el residuo es 0.

2. $\dfrac{7x^6 + 9x^3}{3x^5} = \dfrac{7x^6}{3x^5} + \dfrac{9x^3}{3x^5} = \dfrac{7}{3}x + \dfrac{9x^3}{3x^5}.$

   El cociente es $\dfrac{7}{3}x$ y el residuo es $9x^3$.

   La expresión $\dfrac{9x^3}{3x^5}$ puede simplicarse: $\dfrac{9x^3}{3x^5} = 3x^{3-5} = 3x^{-2} = \dfrac{3}{x^2}.$

   Luego,
   $$\frac{7x^6 + 9x^3}{3x^5} = \frac{7}{3}x + \frac{3}{x^2}.$$

Ejemplo 10.5

Dividir:

1. $6m^3 - 8m^2 + 20m$ entre $-2m$.

2. $4a^4 - 6a^3 + 8a^2$ entre $-2a^2$.

3. $\dfrac{2}{3}y^3 - \dfrac{1}{5}y^4 + \dfrac{1}{4}y^5 - y^6$ entre $-\dfrac{1}{5}y^3$.

Solución

1. $$\begin{aligned}\frac{6m^3-8m^2+20m}{-2m} &= \frac{6m^3}{-2m}+\frac{-8m^2}{-2m}+\frac{20m}{-2m}\\ &= -3m^{3-1}+4m^{2-1}-10m^{1-1}\\ &= -3m^2+4m-10.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\frac{4a^4-6a^3+8a^2}{-2a^2} &= \frac{4a^4}{-2a^2}+\frac{-6a^3}{-2a^2}+\frac{8a^2}{-2a^2}\\ &= -2\frac{a^4}{a^2}+3\frac{a^3}{a^2}-4\frac{a^2}{a^2}\\ &= -2a^{4-2}+3a^{3-2}-4a^{2-2}\\ &= -2a^2+3a-4.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\frac{\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{5}y^4+\frac{1}{4}y^5-y^6}{-\frac{1}{5}y^3} &= \frac{\frac{2}{3}y^3}{-\frac{1}{5}y^3}+\frac{-\frac{1}{5}y^4}{-\frac{1}{5}y^3}+\frac{\frac{1}{4}y^5}{-\frac{1}{5}y^3}+\frac{-y^6}{-\frac{1}{5}y^3}\\ &= -\frac{10}{3}y^{3-3}+y^{4-3}-\frac{5}{4}y^{5-3}+5y^{6-3}\\ &= -\frac{10}{3}+y-\frac{5}{4}y^2+5y^3.\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

I. Realizar las operaciones y simplificar el resultado expresándolo con exponentes positivos:

1. $\dfrac{8x^8}{2x^2}$.
2. $\dfrac{3z^5}{2z^3}$.
3. $\dfrac{\frac{1}{3}x^4}{\frac{3}{5}x}$.
4. $\dfrac{9w^7}{\frac{3}{2}w^5}$.
5. $\dfrac{x^4}{2x^4}$.

II. Hallar el cociente y el residuo de dividir:

1. $4x^8 - 10x^6 - 5x^4$ entre $2x^3$.
2. $\frac{1}{4}z^4 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{3}{8}z^2$ entre $\frac{1}{4}z^2$.
3. $3w^7 - 2w^5 + w^4 - w^2$ entre $\frac{1}{3}w^3$.
4. $\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x$ entre $-\frac{1}{5}x^2$.

Respuestas

I. 1. $4x^6$.

2. $\frac{3}{2}z^2$.

3. $\frac{5}{9}x^3$.

4. $6w^2$.

5. $\frac{1}{2}$.

II. 1. Cociente $2x^5 - 5x^3 - \frac{5}{2}x$. Residuo: 0.

2. Cociente $z^2 - \frac{8}{3}z + \frac{3}{2}$. Residuo: 0.

3. Cociente $9w^4 - 6w^2 + 3w$. Residuo: $-w^2$.

4. $-\frac{10}{3}x^2 + x - \frac{5}{4}$. Residuo: $-x$.

Lección 11

División de polinomios II

En esta lección vamos a estudiar el procedimiento a seguir para dividir polinomios entre polinomios, ambos en la misma variable, con dos o más términos y con el grado del dividendo mayor o igual que el grado del divisor.

Para realizar la división de un polinomio con dos o más términos, entre otro polinomio con dos o más términos, ambos en la misma variable y con el grado del dividendo mayor o igual que el grado del divisor, se sigue un procedimiento, conocido como **división larga**, similar al usado en la división entre enteros. Los pasos a seguir son:

1. Tanto el dividendo como el divisor se escriben en orden descendente respecto al exponente de la variable.
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y se obtiene así el primer término del cociente.
3. Se multiplica el primer término del cociente por el divisor y el producto obtenido se resta del dividendo, escribiendo cada término debajo de su semejante. Si algún término de este producto no tiene término semejante en el dividendo, se escribe en el lugar que le corresponda de acuerdo con la ordenación del dividendo y el divisor.
4. El resultado obtenido en el paso anterior se trata como un nuevo dividendo y se repiten los pasos 2. y 3..
5. Se continúa este proceso hasta obtener cero o un polinomio de grado menor que el grado del divisor. Cualquiera de los dos es el residuo.
6. El resultado de la división se escribe así:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}$$

   o también como

$$\text{dividendo} = \text{cociente} \times \text{divisor} + \text{residuo},$$

   forma que utilizaremos con frecuencia en factorización.

Ejemplo 11.1

Dividir $8x^4 + 27x - 22x^2 - 18$ entre $x + 2x^2$.

Solución

Aunque hay diferentes maneras de colocar dividendo, divisor y cociente, vamos a usar la siguiente:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
8x^4 & & -22x^2 & +27x & -18 & 2x^2+x \\ \cline{6-6}
-8x^4 & -4x^3 & & & & 4x^2-2x-10 \\ \cline{1-5}
 & -4x^3 & -22x^2 & +27x & -18 & \\
 & 4x^3 & +2x^2 & & & \\ \cline{1-5}
 & & -20x^2 & +27x & -18 & \\
 & & +20x^2 & +10x & & \\ \cline{1-5}
 & & & 37x & -18 &
\end{array}$$

Explicación:

Ordenamos dividendo y divisor en orden descendente con relación a x.

Como en el dividendo falta el término en x^3 y al realizar la división van a resultar términos en x^3, entonces dejamos un espacio entre $8x^4$ y $-22x^2$ para el término en x^3.

Dividimos el primer término del dividendo $8x^4$ entre el primer término del divisor $2x^2$, $8x^4 \div 2x^2 = 4x^2$ que es el primer término del cociente.

Multiplicamos $4x^2$ por cada uno de los términos del divisor: $(4x^2)(2x^2) = 8x^4$ y $(4x^2)(x) = 4x^3$. Como estos productos hay que restarlos del dividendo, les cambiamos el signo, los escribimos debajo de los términos del dividendo semejantes con ellos y hacemos la suma correspondiente.

El residuo obtenido $-4x^3 - 22x^2 + 27x - 18$ se trata como un nuevo dividendo y se repiten los últimos tres pasos: Dividimos $-4x^3$ entre el primer término del divisor $2x^2$, $-4x^3 \div 2x^2 = -2x$ que es el segundo término del cociente. Multiplicamos $-2x$ por cada uno de los términos del divisor obteniendo $(-2x)(2x^2) = -4x^3$ y $(-2x)(x) = -2x^2$, les cambiamos el signo, los escribimos debajo de sus semejantes y hacemos la suma correspondiente.

Con el residuo obtenido $-20x^2 + 27x - 18$ repetimos nuevamente el proceso: Dividimos $-20x^2$ entre el primer término del divisor $2x^2$, $-20x^2 \div 2x^2 = -10$ y éste es el tercer término del cociente. Multiplicamos -10 por cada uno de los términos del divisor y seguimos realizando el procedimiento hasta obtener como residuo $37x - 18$ que es un polinomio de grado menor que el divisor. Aquí termina la división y el resultado se expresa así:

$$\frac{8x^4 + 27x - 22x^2 - 18}{x + 2x^2} = 4x^2 - 2x - 10 + \frac{37x - 18}{x + 2x^2}.$$

ó

$$8x^4 + 27x - 22x^2 - 18 = \left(4x^2 - 2x - 10\right)\left(x + 2x^2\right) + 37x - 18.$$

Ejemplo 11.2

Dividir $6x^4+7x^3+6x^2+32x-7$ entre $3x^2+5x-2$.

Solución

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & +7x^3 & +6x^2 & +32x & -7 & 3x^2+5x-2 \\
\cline{6-6}
-6x^4 & -10x^3 & +4x^2 & & & 2x^2-x+5 \\
\cline{1-5}
 & -3x^3 & +10x^2 & +32x & -7 & \\
 & 3x^3 & +5x^2 & -2x & & \\
\cline{1-5}
 & & 15x^2 & +30x & -7 & \\
 & & -15x^2 & -25x & +10 & \\
\cline{1-5}
 & & & 5x & +3 &
\end{array}
$$

Por tanto,

$$\frac{6x^4+7x^3+6x^2+32x-7}{3x^2+5x-2}=2x^2-x+5+\frac{5x+3}{3x^2+5x-2}.$$

ó

$$6x^4+7x^3+6x^2+32x-7=(2x^2-x+5)(3x^2+5x-2)+5x+3.$$

Ejemplo 11.3

Dividir $2x^2$ entre x^2-5.

Solución

$$
\begin{array}{rr|l}
2x^2 & & x^2-5 \\
\cline{3-3}
-2x^2 & +10 & 2 \\
\cline{1-2}
 & +10 &
\end{array}
$$

Luego,

$$\frac{2x^2}{x^2-5}=2+\frac{10}{x^2-5}.$$

ó

$$2x^2=2(x^2-5)+10.$$

Ejemplo 11.4

Dividir $x^5-3x^4+9x^2-4$ entre x^2-3x+2.

Solución

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -3x^4 & & +9x^2 & & -4 & x^2-3x+2 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +3x^4 & -2x^3 & & & & x^3-2x+3 \\ \hline
 & & -2x^3 & +9x^2 & & -4 & \\
 & & +2x^3 & -6x^2 & +4x & & \\ \hline
 & & & 3x^2 & +4x & -4 & \\
 & & & -3x^2 & +9x & -6 & \\ \hline
 & & & & 13x & -10 &
\end{array}
$$

Por tanto:

$$\frac{x^5-3x^4+9x^2-4}{x^2-3x+2} = x^3-2x+3+\frac{13x-10}{x^2-3x+2}.$$

ó

$$x^5-3x^4+9x^2-4 = (x^3-2x+3)(x^2-3x+2)+13x-10.$$

Ejemplo 11.5

Dividir $\frac{1}{16}z^3 - \frac{5}{8}z^2 - 1$ entre $\frac{1}{4}z - \frac{3}{2}$.

Solución

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\frac{1}{16}z^3 & -\frac{5}{8}z^2 & & -1 & \frac{1}{4}z-\frac{3}{2} \\ \cline{5-5}
-\frac{1}{16}z^3 & +\frac{3}{8}z^2 & & & \frac{1}{4}z^2-z-6 \\ \hline
 & -\frac{1}{4}z^2 & & -1 & \\
 & \frac{1}{4}z^2 & -\frac{3}{2}z & & \\ \hline
 & & -\frac{3}{2}z & -1 & \\
 & & +\frac{3}{2}z & -9 & \\ \hline
 & & & -10 &
\end{array}
$$

Luego,

$$\frac{\frac{1}{16}z^3-\frac{5}{8}z^2-1}{\frac{1}{4}z-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}z^2-z-6+\frac{-10}{\frac{1}{4}z-\frac{3}{2}}.$$

ó

$$\frac{1}{16}z^3 - \frac{5}{8}z^2 - 1 = \left(\frac{1}{4}z^2 - z - 6\right)\left(\frac{1}{4}z - \frac{3}{2}\right) - 10.$$

Ejercicios propuestos

I. Dividir:

1. $a^5 - a^4 + 10 - 27a + 7a^2$ entre $a^2 + 5 - a$.
2. $5y^8 - 3y^7 - 11y^6 + 11y^5 - 17y^4 - 3y^3 - 4y^2 - 2y$ entre $5y^4 - 3y^3 + 4y^2 + 2y$.
3. $\frac{3}{4}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{37}{40}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{5} + \frac{19}{30}x$ entre $2x^3 - \frac{1}{3}x + 2$.
4. $x^2 + 7x + 10$ entre $x + 6$.
5. $x^3 + 4x^2 - 5x + 8$ entre $x^2 - 2x + 1$.
6. $y^5 + y^4 - 2y^3 + 3y^2 - 5$ entre $y^2 - 3$

II. Dividir la suma de $x^5 - x^3 + 5x^2$, $-2x^4 + 2x^2 - 10x$, $6x^3 - 6x + 30$ entre $x^2 - 2x + 6$.

Respuestas

I. 1. $a^3 - 5a + 2$.
2. $y^4 - 3y^2 - 1$.
3. $\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{2}{5}$.
4. $x + 1 + \dfrac{4}{x + 6}$.
5. $x + 6 + \dfrac{6x + 2}{x^2 - 2x + 1}$.
6. $y^3 + y^2 + y + 6 + \dfrac{3y + 13}{y^2 - 3}$.

II. $x^3 - x + 5$.

Lección 12

Factorización o descomposición en factores

En los productos notables y en general en la multiplicación de polinomios, obteníamos un polinomio como el producto de dos o más polinomios. En las próximas lecciones vamos a estudiar el proceso contrario, esto es, dado un polinomio vamos a expresarlo como el producto de dos o más polinomios.

Iniciemos refiriéndonos al concepto de factor para números enteros.

Por ejemplo, como $12 = 3 \cdot 4$ decimos que 3 y 4 son factores de 12. De igual forma 2 y 6 son factores de 12 porque $12 = 2 \cdot 6$. ¿Cómo determinar si un entero b dado es un factor de 12? Lo será si hay un entero c tal que $12 = b \cdot c$, es decir, si la división $12 \div b$ es exacta.

En general, un entero $b \neq 0$ es un factor de un entero a si hay un entero c tal que

$$a = b \cdot c$$

o, en otras palabras, si la división $a \div b$ es exacta.

Ejemplo 12.1

Hallar todos los factores positivos de 18.

Solución

Haciendo la división de 18 entre cada uno de los enteros 1, 2, ..., 18 encontramos que la división es exacta únicamente para 1, 2, 3, 6, 9 y 18. Luego, estos números son los factores positivos de 18. Por ejemplo, 6 es un factor porque $\frac{18}{6} = 3$ y así $18 = 6 \cdot 3$.

Nótese que -6 también es factor ya que $18 = (-6)(-3)$. Los factores negativos de 18 son -1, -2, -3, -6, -9 y -18.

Un entero mayor que 1, cuyos únicos factores positivos son 1 y él mismo, se llama **número primo**. Por ejemplo, 2 es primo porque es mayor que 1 y sus únicos factores positivos son 1 y el propio 2. Los primos menores que 10 son 2, 3, 5 y 7.

Todo entero mayor que 1 puede expresarse como un producto de factores primos. Tal expresión se conoce como **factorización** o **descomposición en factores primos**.

A continuación ilustramos cómo obtener la descomposición en factores primos o factorización del número 126.

Empezamos dividiendo 126 entre 2: $126 \div 2 = 63$. Luego, $126 = 2 \cdot 63$.

Seguiría la división $63 \div 2$, pero ésta no es exacta.

Dividimos 63 entre 3 : $\quad 63 \div 3 = 21$. Luego, $126 = 2 \cdot \underbrace{3 \cdot 21}_{63}$.

Dividimos 21 entre 3 : $\quad 21 \div 3 = 7$. Luego, $126 = 2 \cdot 3 \cdot \underbrace{3 \cdot 7}_{21}$.

7 es primo : $\quad 7 \div 7 = 1$.

Luego, la factorización o descomposición en factores primos de 126 es

$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

El proceso anterior se realiza de manera abreviada en la forma siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Ejemplo 12.2

Factorizar los números: 273, 264 y 17.

Solución

Descomponemos 273, 264 y 17 en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 273 & 3 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 264 & 2 \\ 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

Luego,

$273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$.

$264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$.

$17 = 17$, 17 es un número primo.

Vamos ahora a considerar el concepto de factor y de factorización para polinomios.

Dado un polinomio, cada uno de los polinomios que multiplicados entre sí dan como resultado el primero, se llama **factor** de ese polinomio.

Ejemplo 12.3

1. $x+1$ y $x-1$ son factores de x^2-1, ya que de los productos notables sabemos que $x^2-1=(x+1)(x-1)$.
2. $x+y$ es factor de $x^2+2xy+y^2$, ya que $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2=(x+y)(x+y)$.
3. $a-b$ es factor de $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$. ¿Por qué?
4. $4a$ y $2b-3$ son factores de $8ab-12a$. ¿Por qué?
5. $x-5$ es factor de $(x-5)^2$. ¿Por qué?

Ejemplo 12.4

Determinar si $x+1$ es o no es factor de x^3+x^2-3x-3.

Solución

Hagamos la división $(x^3+x^2-3x-3)\div(x+1)$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & -3x & -3 & x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -x^2 & & & x^2-3 \\ \cline{1-4}
 & & -3x & -3 & \\
 & & 3x & +3 & \\ \cline{1-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Entonces,

$$\frac{x^3+x^2-3x-3}{x+1}=x^2-3$$

es decir,

$$x^3+x^2-3x-3=(x+1)\left(x^2-3\right).$$

Luego, $x+1$ sí es factor de x^3+x^2-3x-3.

Ejemplo 12.5

Determinar si $x-2$ es o no es factor de x^3-2x^2+2x-1.

Solución

Hagamos la división $(x^3-2x^2+2x-1)\div(x-2)$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -2x^2 & +2x & -1 & x-2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +2x^2 & & & x^2+2 \\ \cline{1-4}
 & & +2x & -1 & \\
 & & -2x & +4 & \\ \cline{1-4}
 & & & 3 &
\end{array}$$

Como
$$\frac{x^3-2x^2+2x-1}{x-2}=x^2+2+\frac{3}{x-2},$$
la división no es exacta. Luego, $x-2$ no es factor de x^3-2x^2+2x-1.

Factorizar un polinomio dado es expresarlo como un producto de dos o más polinomios.

Así como en los enteros hay números primos, en los polinomios hay polinomios primos: Un polinomio p de grado mayor o igual que 1 se llama **primo** si p no se puede expresar como producto de polinomios, cada uno de ellos de grado menor que el de p.

Notas:

- Nos limitaremos a polinomios con coeficientes enteros o con coeficientes racionales.
- Convenimos en que si el polinomio a factorizar tiene coeficientes enteros, la factorización es con factores cuyos coeficientes son también enteros. Si esto no es posible, entonces con factores cuyos coeficientes son racionales o en último caso números reales.
- Un polinomio p con coeficientes en un cierto conjunto numérico (enteros, racionales o reales) puede ser primo en dicho conjunto numérico, pero no serlo en otro.

Ejemplo 12.6

1. $2x-3$ es primo (en los enteros, en los racionales y en los reales) porque no se puede expresar como un producto de polinomios de grado menor que 1, es decir, como un producto de polinomios constantes.
2. El polinomio x^2-2 es primo en el conjunto de los enteros y también en el de los racionales (¿Por qué?), pero no lo es en el conjunto de los reales, puesto que en dicho conjunto x^2-2 se factoriza como
$$x^2-2=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right).$$
Recordemos que $\sqrt{2}$ no es entero ni racional.

Ejercicios propuestos

1. Hallar la descomposición en factores primos de los números 36, 213 y 45.
2. Determinar si $x+3$ es factor de x^3-3x+5.
3. ¿Es $z-1$ factor de z^3-3z^2+3z-1?

Respuestas

1. $36=2^2\cdot 3^2$, $213=3\cdot 71$ y $45=3^2\cdot 5$.
2. No lo es.
3. Si.

Lección 13

Factorización
Factor común

En esta lección y en las siguientes, veremos cómo factorizar algunos polinomios. Iniciemos con los casos en los cuales todos los términos del polinomio tienen un factor común o al ordenarlos y agruparlos adecuadamente, se obtiene un factor común.

Factor común

Todos los términos del polinomio a factorizar tienen un factor común, es decir, aparecen números, letras o combinaciones de números y letras, comunes a todos los términos del polinomio. Para factorizarlo se expresa como el producto del factor común por el polinomio que se obtiene al dividir cada uno de los términos del polinomio dado entre el factor común.

El factor común puede ser un monomio o un polinomio de dos o más términos.

a) **El factor común es un monomio.**

Ejemplo 13.1

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $x^3 - x^2y + 3x$.
2. $9ab - 12bc + 30b^2$.
3. $18m^3n^4z - 12mn^2 + 36n^3z^3$.
4. $3mn^2w - 12m^2nw^2 + 4m^5n^2 - 6mn$.

Solución

1. $x^3 - x^2y + 3x = x \cdot x \cdot x - x \cdot x \cdot y + 3x$. Como x es el único factor común en todos los términos, escribimos el polinomio original como el producto de x por un polinomio cuyos términos resultan de dividir cada uno de los términos del polinomio dado entre x. Así,
$$x^3 - x^2y + 3x = x\left(\frac{x^3}{x} - \frac{x^2y}{x} + \frac{3x}{x}\right) = x(x^2 - xy + 3).$$

2. El mayor factor común de los coeficientes 9, -12 y 30 es 3 y b es el único factor común literal. Tenemos así,

$$9ab - 12bc + 30b^2 = 3b\left(\frac{9ab}{3b} - \frac{12bc}{3b} + \frac{30b^2}{3b}\right) = 3b(3a - 4c + 10b).$$

En la práctica se escribe el resultado sin indicar las divisiones.

3. Descomponemos 18, 12 y 36 en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Luego, $18 = 2$ x 3^2, $12 = 2^2$ x 3 y $36 = 2^2$ x 3^2 y por tanto el mayor factor común de los coeficientes es 2 x $3 = 6$. El factor común literal de mayor grado es n^2 y así,

$$18m^3n^4z - 12mn^2 + 36n^3z^3 = 6n^2(3m^3n^2z - 2m + 6nz^3).$$

4. $3mn^2w - 12m^2nw^2 + 4m^5n^2 - 6mn = mn\,(3nw - 12mw^2 + 4m^4n - 6).$

b) **El factor común es un polinomio**

Ejemplo 13.2

Descomponer en factores:

1. $x(a+1) + 3(a+1)$.
2. $2x(n-1) - 3y(n-1)$.
3. $(3x+2)(x+y-z) - (3x+2) - (x+y-1)(3x+2)$.
4. $a^3(a-b+1) - b^2(a-b+1)$.
5. $(x-3)(x-4) + (x-3)(x+4)$.

Solución

1. $x(a+1) + 3(a+1) = (a+1)\left(\dfrac{x(a+1)}{a+1} + \dfrac{3(a+1)}{a+1}\right)$ Los dos términos tienen como factor común $a+1$

   $= (a+1)(x+3)$.

2. $2x(n-1) - 3y(n-1) = (n-1)(2x-3y)$ El factor común es $n-1$.

3. $(3x+2)(x+y-z) - (3x+2) - (x+y-1)(3x+2)$

   $= (3x+2)[(x+y-z) - 1 - (x+y-1)]$ El factor común es $3x+2$

   $= (3x+2)(x+y-z-1-x-y+1)$ Eliminamos signos de agrupación

   $= (3x+2)(-z)$ Reducimos términos semejantes

   $= -z(3x+2)$.

4. $a^3(a-b+1) - b^2(a-b+1) = (a-b+1)(a^3-b^2)$ El factor común es $a-b+1$.

5. $$\begin{aligned}(x-3)(x-4)+(x-3)(x+4) &= (x-3)(x-4+x+4)\\ &= 2x(x-3) \text{ El factor común es } x-3.\end{aligned}$$

Ejemplo 13.3

Descomponer en factores:

1. $14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4$.
2. $6(x+5)^2 - 3(x+5)$.
3. $-5x^6y^4 - 15x^2y^6 + 10x^2y^5 - 5x^2y^4$.

Solución

1. Descomponemos 14, 28 y 56 en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Como, $14 = 2$ x 7; $28 = 2^2$ x 7 y $56 = 2^3$ x 7, el factor común de los coeficientes es 2 x $7 = 14$. El factor común literal es x^2 y así:

$$14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4 = 14x^2(y^2 - 2x + 4x^2).$$

2. $$\begin{aligned}6(x+5)^2 - 3(x+5) &= 3(x+5)[2(x+5)-1]\\ &= 3(x+5)(2x+9).\end{aligned}$$

3. $-5x^6y^4 - 15x^2y^6 + 10x^2y^5 - 5x^2y^4 = -5x^2y^4(x^4 + 3y^2 - 2y + 1)$.

Factor común por agrupación de términos

En algunos polinomios en los cuales no aparece explícito un factor común, al ordenar y agrupar adecuadamente los términos, se encuentra un factor común.

Ejemplo 13.4

Factorizar:

1. $x(a+1) - a - 1$.
2. $am - bm + an - bn$.
3. $3m - 2n - 2nx^4 + 3mx^4$.
4. $3a - b^2 + 2b^2x - 6ax$.

Solución

1. $x(a+1)-a-1 = x(a+1)-(a+1)$ Agrupamos los dos últimos términos

   $= (a+1)(x-1)$ El factor común es $a+1$.

2. Es muy importante tener en cuenta que al hacer las agrupaciones, las expresiones que se obtengan al sacar el factor común en cada una de ellas, sean iguales.

$$\begin{aligned} am-bm+an-bn &= (am-bm)+(an-bn) \\ &= m(a-b)+n(a-b) \\ &= (a-b)(m+n). \end{aligned}$$

   La agrupación también pudo hacerse así:

$$\begin{aligned} am-bm+an-bn &= (am+an)-(bm+bn) \\ &= a(m+n)-b(m+n) \\ &= (m+n)(a-b). \end{aligned}$$

   Observamos que, en ambos casos, el resultado es el mismo.

3. $$\begin{aligned} 3m-2n-2nx^4+3mx^4 &= (3m-2n)+(3mx^4-2nx^4) \\ &= (3m-2n)+x^4(3m-2n) \\ &= (3m-2n)(1+x^4). \end{aligned}$$

   Organizando y agrupando los términos de otra forma:

$$\begin{aligned} 3m-2n-2nx^4+3mx^4 &= (3m+3mx^4)-(2n+2nx^4) \\ &= 3m(1+x^4)-2n(1+x^4) \\ &= (1+x^4)(3m-2n). \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 3a-b^2+2b^2x-6ax &= (3a-b^2)-(6ax-2b^2x) \\ &= (3a-b^2)-2x(3a-b^2) \\ &= (3a-b^2)(1-2x). \end{aligned}$$

Ejemplo 13.5

Factorizar:

1. $n^2x-5a^2y^2-n^2y^2+5a^2x$
2. $3ax-2by-2bx-6a+3ay+4b$
3. $2am-2an+2a-m+n-1$
4. $2x^3-nx^2+2xz^2-nz^2-3ny^2+6xy^2$.

Solución

1. $n^2x - 5a^2y^2 - n^2y^2 + 5a^2x$

$$
\begin{aligned}
&= (n^2x - n^2y^2) + (5a^2x - 5a^2y^2) && \text{Agrupamos los términos}\\
&= n^2(x - y^2) + 5a^2(x - y^2) && \text{Sacamos factor común en cada agrupación}\\
&= (x - y^2)(n^2 + 5a^2) && \text{El factor común es } x - y^2.
\end{aligned}
$$

2. $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$

$$
\begin{aligned}
&= (3ax - 2bx) + (-6a + 4b) + (-2by + 3ay) && \text{Agrupamos los términos}\\
&= x(3a - 2b) - 2(3a - 2b) + y(3a - 2b) && \text{Sacamos factor común en cada agrupación}\\
&= (3a - 2b)(x - 2 + y) && \text{El factor común es } 3a - 2b.
\end{aligned}
$$

3. $$
\begin{aligned}
2am - 2an + 2a - m + n - 1 &= 2a(m - n + 1) - (m - n + 1)\\
&= (m - n + 1)(2a - 1) \quad \text{El factor común es } m - n + 1.
\end{aligned}
$$

4. $$
\begin{aligned}
2x^3 - nx^2 + 2xz^2 - nz^2 - 3ny^2 + 6xy^2 &= \left(2x^3 - nx^2\right) + \left(2xz^2 - nz^2\right) - \left(3ny^2 - 6xy^2\right)\\
&= x^2\,(2x - n) + z^2\,(2x - n) - 3y^2\,(n - 2x)\\
&= x^2\,(2x - n) + z^2\,(2x - n) + 3y^2\,(2x - n)\\
&= (2x - n)\left(x^2 + z^2 + 3y^2\right).
\end{aligned}
$$

Ejercicios propuestos

Factorizar:

1. $x(2a + b + c) - 2a - b - c$.
2. $3x(x - 1) - 2y(x - 1) + z(x - 1)$.
3. $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$.
4. $3x^3 + 2axy + 2ay^2 - 3xy^2 - 2ax^2 - 3x^2y$.
5. $a^2b^3 - n^4 + a^3b^3x^2 - an^4x^2 - 3a^2b^3x + 3n^4x$.

Respuestas

1. $(2a + b + c)(x - 1)$.
2. $(x - 1)(3x - 2y + z)$.
3. $(ax - b)(4a^2 - 3m)$.
4. $(3x - 2a)(x^2 - y^2 - xy)$.
5. $(a^2b^3 - n^4)(1 + ax^2 - 3x)$.

Lección 14

Factorización
Trinomio cuadrado perfecto

En esta lección aprenderemos a factorizar un tipo especial de trinomios conocidos como trinomios cuadrados perfectos.

En la lección de productos notables vimos que:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Las expresiones a la derecha de las igualdades, conocidas como **trinomios cuadrados perfectos**, sólo difieren en el signo del término de la mitad. Así, un trinomio cuadrado perfecto es un trinomio que tiene las siguientes características:

1. Dos de sus términos son cuadrados perfectos, con signo $+$, es decir, se pueden escribir de la forma a^2 y b^2.

2. El otro término es igual a dos veces el producto de las expresiones a y b que aparecen elevadas al cuadrado en 1., con signo $+$ o $-$.

Si en 2., el signo es $+$ el trinomio se factoriza como $(a+b)^2$, y si es $-$ se factoriza como $(a-b)^2$.

Ejemplo 14.1

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $9x^2 + 12x + 4$.
2. $4a^2 + 12ab + 9b^2$.
3. $25x^2 - 70x + 49$.
4. $z^2 - zy + y^2$.
5. $9x^2 - 48x + 64$.
6. $a^2 - \dfrac{18}{5}a + \dfrac{81}{25}$.
7. $x^2y^2 + 2xy + 1$.
8. $ax^2 - 8ax + 16a$.

Solución

1. $9x^2 + 12x + 4$ es un trinomio cuadrado perfecto ya que $9x^2 = (3x)^2$, $4 = 2^2$ y $12x = 2(3x)(2)$. Por tanto,
$$9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2.$$

2. Como $4a^2 = (2a)^2$, $9b^2 = (3b)^2$ y $12ab = 2(2a)(3b)$ entonces $4a^2 + 12ab + 9b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto y por tanto,
$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2.$$

3. $25x^2 - 70x + 49$ es un trinomio cuadrado perfecto porque $25x^2 = (5x)^2$, $49 = 7^2$ y $70x = 2(5x)(7)$. Luego,
$$25x^2 - 70x + 49 = (5x - 7)^2.$$
Observemos que $25x^2 - 70x + 49$ también puede factorizarse como $(7 - 5x)^2$. ¿Por qué?

4. $z^2 - zy + y^2$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque aunque z^2 y y^2 son cuadrados perfectos, se tiene que $-2zy$ es diferente de $-zy$ que es el término de la mitad. Entonces no podemos aplicar este caso de factorización.

5. Como $9x^2 = (3x)^2$, $64 = 8^2$ y $48x = 2(3x)(8)$ entonces $9x^2 - 48x + 64$ es un trinomio cuadrado perfecto. Por tanto,
$$9x^2 - 48x + 64 = (3x - 8)^2.$$

6. Como $a^2 = (a)^2$, $\dfrac{81}{25} = \left(\dfrac{9}{5}\right)^2$ y $\dfrac{18}{5}a = 2(a)\left(\dfrac{9}{5}\right)$ entonces
$$a^2 - \frac{18}{5}a + \frac{81}{25} = \left(a - \frac{9}{5}\right)^2.$$

7. Como $x^2y^2 = (xy)^2$, $1 = 1^2$ y $2xy = 2(xy)(1)$ entonces
$$x^2y^2 + 2xy + 1 = (xy + 1)^2.$$

8. $ax^2 - 8ax + 16a$ es un trinomio cuyos términos tienen un factor común a. Entonces
$$ax^2 - 8ax + 16a = a\left(x^2 - 8x + 16\right).$$
La expresión entre paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto ya que x^2 es un cuadrado perfecto, $16 = 4^2$ y $8x = 2(x)(4)$. Luego
$$ax^2 - 8ax + 16a = a(x - 4)^2.$$

Ejemplo 14.2

Factorizarlos polinomios:

1. $x^2 + 8x + 16$.
2. $25x^2 + 60xy + 36y^2$.
3. $(x + 2y)^2 + 10(x + 2y) + 25$.

Solución

1. $x^2+8x+16$ es un trinomio cuadrado perfecto porque $x^2 = (x)^2$, $16 = 4^2$ y $8x = 2(x)(4)$. Por tanto,
$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2 .$$
2. $25x^2+60xy+36y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto porque $25x^2 = (5x)^2$, $36y^2 = (6y)^2$ y $60xy = 2(5x)(6y)$. Así,
$$25x^2 + 60xy + 36y^2 = (5x + 6y)^2 .$$
3. Como $(x + 2y)^2$ es un cuadrado perfecto, $25 = 5^2$ y $10(x + 2y) = 2(x + 2y)(5)$ entonces $(x + 2y)^2 + 10(x + 2y) + 25$ es un trinomio cuadrado perfecto y así:
$$(x + 2y)^2 + 10(x + 2y) + 25 = (x + 2y + 5)^2 .$$

Ejemplo 14.3

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $\dfrac{a^2}{4} - ab + b^2$.
2. $12x^4 - \dfrac{36}{5}x^3y + \dfrac{27}{25}x^2y^2$.
3. $-2 + 12x^3 - 18x^6$.
4. $\dfrac{1}{25} + \dfrac{25x^4}{36} - \dfrac{x^2}{3}$.
5. $(m + n)^2 - 2(a - m)(m + n) + (a - m)^2$.

Solución

1. $\dfrac{a^2}{4} - ab + b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto porque
$$\frac{a^2}{4} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \;,\; b^2 = (b)^2 \;\text{ y } ab = 2\left(\frac{a}{2}\right)b.$$
Así,
$$\frac{a^2}{4} - ab + b^2 = \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 .$$
2. Todos los términos del trinomio $12x^4 - \dfrac{36}{5}x^3y + \dfrac{27}{25}x^2y^2$, tienen un factor común $3x^2$. Luego,
$$12x^4 - \frac{36}{5}x^3y + \frac{27}{25}x^2y^2 = 3x^2\left(4x^2 - \frac{12}{5}xy + \frac{9}{25}y^2\right).$$

El polinomio entre paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$4x^2 = (2x)^2 \ , \ \frac{9}{25}y^2 = \left(\frac{3}{5}y\right)^2 \quad \text{y} \quad \frac{12}{5}xy = 2\,(2x)\left(\frac{3}{5}y\right).$$

Por tanto,

$$4x^2 - \frac{12}{5}xy + \frac{9}{25}y^2 = \left(2x - \frac{3}{5}y\right)^2.$$

Luego,

$$12x^4 - \frac{36}{5}x^3y + \frac{27}{25}x^2y^2 = 3x^2\left(2x - \frac{3}{5}y\right)^2.$$

3. Todos los términos del trinomio tienen un factor común 2. Luego,

$$-2 + 12x^3 - 18x^6 = 2\left(-1 + 6x^3 - 9x^6\right).$$

Observemos que si en lugar de sacar factor común 2, sacamos -2, los dos términos del trinomio que son cuadrados perfectos quedan con signo $+$.

$$-2 + 12x^3 - 18x^6 = -2\left(1 - 6x^3 + 9x^6\right).$$

El polinomio entre paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto porque $1^2 = (1)^2$, $9x^6 = \left(3x^3\right)^2$ y $6x^3 = 2\,(1)\left(3x^3\right)$. Por tanto,

$$1 - 6x^3 + 9x^6 = \left(1 - 3x^3\right)^2.$$

Luego,

$$-2 + 12x^3 - 18x^6 = -2\left(1 - 6x^3 + 9x^6\right) = -2\left(1 - 3x^3\right)^2.$$

4. $\dfrac{1}{25} + \dfrac{25x^4}{36} - \dfrac{x^2}{3} = \dfrac{1}{25} - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{25x^4}{36}$ es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$\frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \ , \ \frac{25x^4}{36} = \left(\frac{5x^2}{6}\right)^2 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{3} = 2\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5x^2}{6}\right).$$

Por tanto,

$$\frac{1}{25} + \frac{25x^4}{36} - \frac{x^2}{3} = \left(\frac{1}{5} - \frac{5x^2}{6}\right)^2.$$

5. Como $(m+n)^2$ y $(a-m)^2$ son cuadrados perfectos y el término de la mitad es $-2\,(a-m)\,(m+n)$, entonces tenemos un trinomio cuadrado perfecto y así,

$$\begin{aligned}(m+n)^2 - 2\,(a-m)\,(m+n) + (a-m)^2 &= [(m+n) - (a-m)]^2 \\ &= (m+n-a+m)^2 = (2m+n-a)^2.\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $a^2 - 10a + 25$.
2. $1 - 2a^3 + a^6$.
3. $1 + 49x^4y^2 + 14x^2y$.
4. $-2x^3y^2 + \dfrac{y^4}{16} + 16x^6$.
5. $4\,(1+a)^2 - 4\,(1+a)\,(b-1) + (b-1)^2$.
6. $-3w^2 + \dfrac{18}{5}wy - \dfrac{27}{25}y^2$.

Solución

1. $(a-5)^2$.
2. $(1-a^3)^2$.
3. $(1+7x^2y)^2$.
4. $\left(4x^3 - \dfrac{y^2}{4}\right)^2$.
5. $(2a-b+3)^2$.
6. $-3\left(w - \dfrac{3}{5}y\right)^2$.

Lección 15

Factorización
Diferencia de cuadrados

En esta lección vamos a factorizar polinomios que tienen la forma de una diferencia de cuadrados. Se desarrollarán ejemplos partiendo de la forma más sencilla hasta aquellos que requieren factorizaciones ya estudiadas.

De los productos notables sabemos que

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

La expresión a la derecha de la igualdad es una diferencia de cuadrados perfectos, por tanto, si el polinomio a factorizar es de esta forma, debemos considerar esta igualdad de derecha a izquierda para factorizarlo como

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Ejemplo 15.1

Factorizar:

1. $x^2 - 16$.
2. $81y^2 - 25x^2$.
3. $a^2 - 4b^2$.
4. $16x^2 - 25y^2$.
5. $x^4 - 81$.
6. $a^2 - \dfrac{1}{25}$.

Solución

1. $x^2 - 16 = (x)^2 - (4)^2 = (x+4)(x-4)$. Por tanto,
$$x^2 - 16 = (x+4)(x-4).$$
2. $81y^2 - 25x^2 = (9y)^2 - (5x)^2 = (9y+5x)(9y-5x)$. Por tanto,
$$81y^2 - 25x^2 = (9y+5x)(9y-5x).$$

3. $a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2 = (a + 2b)(a - 2b)$. Por tanto,

$$a^2 - 4b^2 = (a + 2b)(a - 2b).$$

4. Como $16x^2 - 25y^2 = (4x)^2 - (5y)^2$, entonces

$$16x^2 - 25y^2 = (4x + 5y)(4x - 5y).$$

5. Como $x^4 - 81 = (x^2)^2 - 9^2$ entonces

$$x^4 - 81 = \left(x^2 + 9\right)\left(x^2 - 9\right).$$

El segundo factor es de nuevo una diferencia de cuadrados perfectos y por lo tanto se puede continuar con la factorización. Como $x^2 - 9 = x^2 - 3^2$ entonces $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ y así,

$$x^4 - 81 = \left(x^2 + 9\right)(x + 3)(x - 3).$$

Nota : $x^2 + 9$ no es factorizable en la forma $(x + a)(x + b)$ con a y b números reales, es decir, $x^2 + 9$ es primo en el conjunto de los reales.

Más adelante veremos algunas sumas de dos cuadrados que sí se pueden factorizar en los reales.

6. $a^2 - \dfrac{1}{25} = a^2 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^2$. Por tanto,

$$a^2 - \frac{1}{25} = \left(a + \frac{1}{5}\right)\left(a - \frac{1}{5}\right).$$

Ejemplo 15.2

Factorizar:

1. $\dfrac{a^2}{36} - \dfrac{x^6}{25}$.
2. $(x + y)^2 - a^2$.
3. $(a - 1)^2 - (m - 2)^2$.
4. $a^2 + 2ab + b^2 - x^2$.
5. $25 - x^2 - 16y^2 + 8xy$.
6. $9x^2 + 4y^2 - a^2 - 12xy - 25b^2 - 10ab$.

Solución

1. Como $\dfrac{a^2}{36} - \dfrac{x^6}{25} = \left(\dfrac{a}{6}\right)^2 - \left(\dfrac{x^3}{5}\right)^2$ entonces,

$$\frac{a^2}{36} - \frac{x^6}{25} = \left(\frac{a}{6} + \frac{x^3}{5}\right)\left(\frac{a}{6} - \frac{x^3}{5}\right).$$

2. $(x+y)^2 - a^2 = [(x+y)+a][(x+y)-a]$

$$= (x+y+a)(x+y-a).$$

3. $(a-1)^2 - (m-2)^2 = [(a-1)+(m-2)][(a-1)-(m-2)]$

$$= (a-1+m-2)(a-1-m+2)$$

$$= (a+m-3)(a-m+1).$$

4. $a^2+2ab+b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto. Luego,

$$\begin{aligned} a^2+2ab+b^2-x^2 &= (a^2+2ab+b^2)-x^2 \\ &= (a+b)^2-x^2 \\ &= (a+b+x)(a+b-x). \end{aligned}$$

5. Ordenemos el polinomio así: $25-x^2-16y^2+8xy = 25-x^2+8xy-16y^2$.

   Agrupemos los tres últimos términos en un paréntesis precedido de signo $-$.

$$25-x^2-16y^2+8xy = 25-(x^2-8xy+16y^2).$$

   El polinomio entre paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto que podemos factorizar como

$$x^2-8xy+16y^2 = (x-4y)^2.$$

   Y por lo tanto,

$$\begin{aligned} 25-x^2-16y^2+8xy &= 25-(x-4y)^2 \\ &= [5+(x-4y)][5-(x-4y)] \\ &= (5+x-4y)(5-x+4y). \end{aligned}$$

6. Ordenamos y agrupamos los términos del polinomio así:

$$9x^2+4y^2-a^2-12xy-25b^2-10ab = (9x^2-12xy+4y^2)-(a^2+10ab+25b^2).$$

   Cada uno de los polinomios entre paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto que factorizamos así:

$$9x^2-12xy+4y^2 = (3x-2y)^2 \;\text{ y }\; a^2+10ab+15b^2 = (a+5b)^2.$$

   Y así se tenemos que

$$\begin{aligned} 9x^2+4y^2-a^2-12xy-25b^2-10ab &= (3x-2y)^2-(a+5b)^2 \\ &= (3x-2y+a+5b)(3x-2y-a-5b). \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

Factorizar

1. $a^{10}-49b^2$.

2. $(2a+b-c)^2-(a+b)^2$.
3. $m^6-(m^2-1)^2$.
4. $1+64a^2b^2-x^4-16ab$.
5. $m^2-x^2+9n^2+6mn-4ax-4a^2$.
6. $225a^2-169b^2+1+30a+26bc-c^2$.

Respuestas

1. $(a^5+7b)(a^5-7b)$.
2. $(3a+2b-c)(a-c)$.
3. $(m^3+m^2-1)(m^3-m^2+1)$.
4. $(8ab-1+x^2)(8ab-1-x^2)$.
5. $(m+3n+x+2a)(m+3n-x-2a)$.
6. $(15a+1+13b-c)(15a+1-13b+c)$.

Lección 16

Factorización
Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción

En esta lección estudiaremos cómo factorizar algunos trinomios que no son trinomios cuadrados perfectos.

Algunos de estos trinomios se pueden convertir en trinomios cuadrados perfectos sumándoles una cantidad apropiada. Para que el trinomio dado no varíe, si sumamos una cantidad debemos restar la misma cantidad. Ésta debe ser un cuadrado perfecto para que al restarla nos resulte una diferencia de cuadrados, que ya sabemos factorizar.

Ejemplo 16.1

Factorizar

1. $a^4 + 2a^2 + 9$.
2. $4x^4 + 3x^2y^2 + 9y^4$.
3. $36x^4 - x^2 + 4$.
4. $1 - 126a^2b^4 + 169a^4b^8$.
5. $x^8 + 4x^4y^4 + 16y^8$.

Solución

1. Vemos que $a^4 + 2a^2 + 9$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque $a^4 = \left(a^2\right)^2$, $9 = 3^2$ y $2(a^2)(3) = 6a^2 \neq 2a^2$.

   Una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es convirtiendo el segundo término $2a^2$ en $6a^2$ y ello se logra sumándole $4a^2$. Para que el trinomio dado no varíe debemos restar la misma cantidad $4a^2$ que se sumó. Así,

$$
\begin{aligned}
& a^4 + 2a^2 + 9 & \\
& = a^4 + 2a^2 + 9 + 4a^2 - 4a^2 & \text{Sumamos y restamos } 4a^2 \\
& = (a^4 + 2a^2 + 9 + 4a^2) - 4a^2 & \text{Agrupamos los primeros 4 términos} \\
& = (a^4 + 6a^2 + 9) - 4a^2 & \text{Reducimos términos semejantes en el paréntesis} \\
& = (a^2 + 3)^2 - (2a)^2 & \text{Factorizamos el trinomio} \\
& = [(a^2 + 3) + 2a][(a^2 + 3) - 2a] & \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
& = (a^2 + 2a + 3)(a^2 - 2a + 3) & \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } a.
\end{aligned}
$$

2. Vemos que $4x^4 + 3x^2y^2 + 9y^4$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$4x^4 = \left(2x^2\right)^2,\ 9y^4 = \left(3y^2\right)^2 \text{ y } 2(2x^2)(3y^2) = 12x^2y^2 \neq 3x^2y^2.$$

Una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es convirtiendo el segundo término $3x^2y^2$ en $12x^2y^2$ y ello se logra sumándole $9x^2y^2$. Para que el trinomio dado no varíe debemos restar la misma cantidad $9x^2y^2$ que se sumó. Así,

$$\begin{aligned}
&4x^4 + 3x^2y^2 + 9y^4 \\
&\quad = 4x^4 + 3x^2y^2 + 9y^4 + 9x^2y^2 - 9x^2y^2 && \text{Sumamos y restamos } 9x^2y^2 \\
&\quad = (4x^4 + 3x^2y^2 + 9y^4 + 9x^2y^2) - 9x^2y^2 && \text{Agrupamos los primeros 4 términos} \\
&\quad = (4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4) - 9x^2y^2 && \text{Reducimos términos semejantes en el paréntesis} \\
&\quad = (2x^2 + 3y^2)^2 - (3xy)^2 && \text{Factorizamos el trinomio} \\
&\quad = [(2x^2 + 3y^2) + 3xy][(2x^2 + 3y^2) - 3xy] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&\quad = (2x^2 + 3xy + 3y^2)(2x^2 - 3xy + 3y^2) && \text{Ordenamos cada factor respecto a } x.
\end{aligned}$$

3. $36x^4 - x^2 + 4$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$36x^4 = \left(6x^2\right)^2,\ 4 = 2^2 \text{ y } 2\left(6x^2\right)(2) = 24x^2 \neq x^2.$$

Una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es convirtiendo el segundo término $-x^2$ en $24x^2$ y ello se logra sumándole $25x^2$. Para que el trinomio dado no varíe debemos restar la misma cantidad $25x^2$ que se sumó. Así,

$$\begin{aligned}
&36x^4 - x^2 + 4 \\
&\quad = 36x^4 - x^2 + 4 + 25x^2 - 25x^2 && \text{Sumamos y restamos } 25x^2 \\
&\quad = \left(36x^4 - x^2 + 4 + 25x^2\right) - 25x^2 && \text{Agrupamos los primeros 4 términos} \\
&\quad = \left(36x^4 + 24x^2 + 4\right) - 25x^2 && \text{Reducimos términos semejantes en el paréntesis} \\
&\quad = \left(6x^2 + 2\right)^2 - (5x)^2 && \text{Factorizamos el trinomio} \\
&\quad = \left(6x^2 + 2 + 5x\right)\left(6x^2 + 2 - 5x\right) && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&\quad = \left(6x^2 + 5x + 2\right)\left(6x^2 - 5x + 2\right) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } x.
\end{aligned}$$

Nota: Observemos en los ejemplos anteriores, que la factorización del trinomio dado pudo hacerse, por este método, porque la cantidad que sumamos y restamos para completar el trinomio cuadrado perfecto es un cuadrado perfecto y de esa manera resultó al final una diferencia de cuadrados que hizo posible la factorización.

4. $1 - 126a^2b^4 + 169a^4b^8$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$1 = 1^2,\ 169a^4b^8 = \left(13a^2b^4\right)^2 \text{ y } 2(1)(13a^2b^4) = 26a^2b^4 \neq 126a^2b^4.$$

En este caso una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es convirtiendo el segundo término $-126a^2b^4$ en $-26a^2b^4$ y ello se logra sumando $100a^2b^4$.

$$\begin{aligned}
&1 - 126a^2b^4 + 169a^4b^8 \\
&\quad = 1 - 126a^2b^4 + 169a^4b^8 + 100a^2b^4 - 100a^2b^4 && \text{Sumamos y restamos } 100a^2b^4 \\
&\quad = (1 - 126a^2b^4 + 169a^4b^8 + 100a^2b^4) - 100a^2b^4 && \text{Agrupamos los primeros 4 términos} \\
&\quad = (1 - 26a^2b^4 + 169a^4b^8) - 100a^2b^4 && \text{Reducimos términos semejantes en el paréntesis} \\
&\quad = (1 - 13a^2b^4)^2 - \left(10ab^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio} \\
&\quad = [(1 - 13a^2b^4) + 10ab^2][(1 - 13a^2b^4) - 10ab^2] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&\quad = (1 + 10ab^2 - 13a^2b^4)(1 - 10ab^2 - 13a^2b^4) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } a.
\end{aligned}$$

5. $x^8 + 4x^4y^4 + 16y^8$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$x^8 = \left(x^4\right)^2,\ 16y^8 = \left(4y^4\right)^2 \text{ y } 2(x^4)(4y^4) = 8x^4y^4 \neq 4x^4y^4.$$

En este caso una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es convirtiendo el segundo término $4x^4y^4$ en $8x^4y^4$ y ello se logra sumando $4x^4y^4$.

$$\begin{aligned}
&x^8 + 4x^4y^4 + 16y^8 \\
&\quad = x^8 + 4x^4y^4 + 16y^8 + 4x^4y^4 - 4x^4y^4 && \text{Sumamos y restamos } 4x^4y^4 \\
&\quad = (x^8 + 4x^4y^4 + 16y^8 + 4x^4y^4) - 4x^4y^4 && \text{Agrupamos los primeros 4 términos} \\
&\quad = (x^8 + 8x^4y^4 + 16y^8) - 4x^4y^4 && \text{Reducimos términos semejantes} \\
&\quad = (x^4 + 4y^4)^2 - \left(2x^2y^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio} \\
&\quad = [(x^4 + 4y^4) + 2x^2y^2][(x^4 + 4y^4) - 2x^2y^2] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&\quad = (x^4 + 2x^2y^2 + 4y^4)(x^4 - 2x^2y^2 + 4y^4) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } x.
\end{aligned}$$

Nota: En lugar de sumar y restar una cantidad apropiada para obtener un trinomio cuadrado perfecto, podemos también descomponer el segundo término en dos términos donde uno de ellos es el que se requiere para tener el trinomio cuadrado perfecto. Usemos esta técnica en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 16.2

Factorizar

1. $x^4 - 7x^2 + 9.$
2. $c^8 - 45c^4 + 100.$
3. $4 - 108x^2 + 121x^4.$

Solución

1. $x^4 - 7x^2 + 9$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque $x^4 = \left(x^2\right)^2$, $9 = 3^2$ y $2\left(x^2\right)(3) = 6x^2 \neq 7x^2$.

   Tendríamos un trinomio cuadrado perfecto si el segundo término fuera $6x^2$ y una manera de obtenerlo es descomponer $-7x^2$ como $-6x^2 - x^2$:

$$\begin{aligned}
x^4 - 7x^2 + 9 &= x^4 - 6x^2 - x^2 + 9 && \text{Descomponemos } -7x^2\\
&= \left(x^4 - 6x^2 + 9\right) - x^2 && \text{Reorganizamos y agrupamos términos}\\
&= \left(x^2 - 3\right)^2 - x^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= \left(x^2 - 3 + x\right)\left(x^2 - 3 - x\right) && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= \left(x^2 + x - 3\right)\left(x^2 - x - 3\right) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } x.
\end{aligned}$$

2. Observamos que $c^8 - 45c^4 + 100$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$c^8 = \left(c^4\right)^2,\ 100 = (10)^2 \text{ y } 2(c^4)(10) = 20c^4 \neq 45c^4.$$

   Tendríamos un trinomio cuadrado perfecto si el segundo término fuera $-20c^4$ y una manera de obtenerlo es descomponer $-45c^4$ como $-20c^4 - 25c^4$:

$$\begin{aligned}
&c^8 - 45c^4 + 100\\
&\quad= c^8 - 20c^4 - 25c^4 + 100 && \text{Descomponemos } -45c^4\\
&\quad= (c^8 - 20c^4 + 100) - 25c^4 && \text{Reorganizamos y agrupamos términos}\\
&\quad= (c^4 - 10)^2 - \left(5c^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&\quad= [(c^4 - 10) + 5c^2][(c^4 - 10) - 5c^2] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&\quad= (c^4 + 5c^2 - 10)(c^4 - 5c^2 - 10) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } c.
\end{aligned}$$

3. Vemos que $4 - 108x^2 + 121x^4$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$4 = 2^2,\ 121x^4 = \left(11x^2\right)^2 \text{ y } 2(2)(11x^2) = 44x^2 \neq 108x^2.$$

   Una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es descomponer $-108x^2$ como $-44x^2 - 64x^2$:

$$\begin{aligned}
&4 - 108x^2 + 121x^4\\
&\quad= 4 - 44x^2 - 64x^2 + 121x^4 && \text{Descomponemos } -108x^2\\
&\quad= (4 - 44x^2 + 121x^4) - 64x^2 && \text{Reorganizamos y agrupamos términos}\\
&\quad= (2 - 11x^2)^2 - (8x)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&\quad= [(2 - 11x^2) + 8x][(2 - 11x^2) - 8x] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&\quad= (2 + 8x - 11x^2)(2 - 8x - 11x^2) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } x.
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $x^4 + x^2y^2 + y^4$.
2. $x^8 - 14x^4 + 25$.
3. $x^4 + y^4 - 7x^2y^2$.
4. $9x^4 + 11x^2z^4 + 4z^8$.
5. $49y^8 + 75y^4 + 196$.

Respuestas

1. $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$.
2. $(x^4 + 2x^2 - 5)(x^4 - 2x^2 - 5)$.
3. $(x^2 + 3xy + y^2)(x^2 - 3xy + y^2)$.
4. $(3x^2 + xz^2 + 2z^4)(3x^2 - xz^2 + 2z^4)$.
5. $(7y^4 + 11y^2 + 14)(7y^4 - 11y^2 + 14)$.

Lección 17

Factorización
Suma de dos cuadrados

En esta lección veremos algunas sumas de dos cuadrados que se pueden factorizar, en forma similar a la estudiada en la lección anterior.

Ejemplo 17.1

Factorizar:

1. $4x^8 + y^8$.
2. $64 + a^{12}$.
3. $1 + 4n^4$.
4. $64x^4 + 81y^4$.

Solución

1. Como $4x^8 + y^8 = (2x^4)^2 + (y^4)^2$, para completar un trinomio cuadrado perfecto le sumamos un término igual a $2(2x^4)(y^4) = 4x^4y^4$, y para que el polinomio dado no varíe restamos ese mismo término. Haciendo esto estamos en el caso anterior y procedemos de igual forma. Así,

$$\begin{aligned}
4x^8 + y^8 &= 4x^8 + y^8 + 4x^4y^4 - 4x^4y^4 && \text{Sumamos y restamos } 4x^4y^4\\
&= (4x^8 + 4x^4y^4 + y^8) - 4x^4y^4 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos}\\
&= (2x^4 + y^4)^2 - \left(2x^2y^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= [(2x^4 + y^4) + 2x^2y^2][(2x^4 + y^4) - 2x^2y^2] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= (2x^4 + 2x^2y^2 + y^4)(2x^4 - 2x^2y^2 + y^4) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } x.
\end{aligned}$$

2. Como $64 + a^{12} = (8)^2 + (a^6)^2$, para completar un trinomio cuadrado perfecto le sumamos un término igual a $2(8)(a^6) = 16a^6$.

$$\begin{aligned}
64 + a^{12} &= 64 + a^{12} + 16a^6 - 16a^6 && \text{Sumamos y restamos } 16a^6\\
&= \left(64 + 16a^6 + a^{12}\right) - 16a^6 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (8+a^6)^2 - (4a^3)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= \left[(8+a^6)+4a^3\right]\left[\left(8+a^6\right)-4a^3\right] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= (8+4a^3+a^6)(8-4a^3+a^6) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } a.
\end{aligned}
$$

3. Como $1 + 4n^4 = 1^2 + (2n^2)^2$, sumándole el término $2(1)(2n^2) = 4n^2$ obtenemos un trinomio cuadrado perfecto.

$$
\begin{aligned}
1+4n^4 &= 1+4n^4+4n^2-4n^2 && \text{Sumamos y restamos } 4n^2\\
&= (1+4n^2+4n^4)-4n^2 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos}\\
&= (1+2n^2)^2-(2n)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= [(1+2n^2)+2n][(1+2n^2)-2n] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= (1+2n+2n^2)(1-2n+2n^2) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } n.
\end{aligned}
$$

4. Como $64x^4 + 81y^4 = \left(8x^2\right)^2 + \left(9y^2\right)^2$, sumándole el término $2\left(8x^2\right)\left(9y^2\right) = 144x^2y^2$ obtenemos un trinomio cuadrado perfecto.

$$
\begin{aligned}
64x^4+81y^4 &= 64x^4+81y^4+144x^2y^2-144x^2y^2 && \text{Sumamos y restamos } 144x^2y^2\\
&= \left(64x^4+144x^2y^2+81y^4\right)-144x^2y^2 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos}\\
&= \left(8x^2+9y^2\right)^2-(12xy)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= \left[\left(8x^2+9y^2\right)+12xy\right]\left[\left(8x^2+9y^2\right)-12xy\right] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= \left(8x^2+12xy+9y^2\right)\left(8x^2-12xy+9y^2\right) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } x.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 17.2

Factorizar:

1. $x^8 + 324$.
2. $a^4 + \dfrac{b^4}{4}$.
3. $4 + 625y^8$.

Solución

1. Como $x^8 + 324 = \left(x^4\right)^2 + (18)^2$, sumándole el término $2\left(x^4\right)(18) = 36x^4$ obtenemos un trinomio cuadrado perfecto.

$$
\begin{aligned}
x^8+324 &= x^8+324+36x^4-36x^4 && \text{Sumamos y restamos } 36x^4\\
&= \left(x^8+36x^4+324\right)-36x^4 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(x^4+18\right)^2-\left(6x^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= \left[\left(x^4+18\right)+6x^2\right]\left[\left(x^4+18\right)-6x^2\right] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= \left(x^4+6x^2+18\right)\left(x^4-6x^2+18\right) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } x.
\end{aligned}
$$

2. Como $a^4+\dfrac{b^4}{4}=(a^2)^2+\left(\dfrac{b^2}{2}\right)^2$, si le sumamos el término $2\,(a^2)\left(\dfrac{b^2}{2}\right)=a^2b^2$ obtenemos un trinomio cuadrado perfecto.

$$
\begin{aligned}
a^4+\frac{b^4}{4} &= a^4+\frac{b^4}{4}+a^2b^2-a^2b^2 && \text{Sumamos y restamos } a^2b^2\\
&= \left(a^4+a^2b^2+\frac{b^4}{4}\right)-a^2b^2 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos}\\
&= \left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)^2-(ab)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= \left[\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)+ab\right]\left[\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)-ab\right] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= \left(a^2+ab+\frac{b^2}{2}\right)\left(a^2-ab+\frac{b^2}{2}\right) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } a.
\end{aligned}
$$

3. Como $4+625y^8=(2)^2+(25y^4)^2$, si le sumamos el término $2\,(2)\,(25y^4)=100y^4$ obtenemos un trinomio cuadrado perfecto.

$$
\begin{aligned}
4+625y^8 &= 4+625y^8+100y^4-100y^4 && \text{Sumamos y restamos } 100y^4\\
&= \left(4+100y^4+625y^8\right)-100y^4 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos}\\
&= \left(2+25y^4\right)^2-\left(10y^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= \left[\left(2+25y^4\right)+10y^2\right]\left[\left(2+25y^4\right)-10y^2\right] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= \left(2+10y^2+25y^4\right)\left(2-10y^2+25y^4\right) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } y.
\end{aligned}
$$

Ejercicios propuestos

Factorizar los siguientes polinomios:

1. z^4+64.
2. $4x^4+y^4$.
3. $81z^4+4x^4$.
4. $64x^8+625y^8$.

5. $4 + (1 - x)^4$.

Respuestas

1. $\left(z^2 + 4z + 8\right)\left(z^2 - 4z + 8\right)$.
2. $\left(2x^2 + 2xy + y^2\right)\left(2x^2 - 2xy + y^2\right)$.
3. $\left(9z^2 + 6xz + 2x^2\right)\left(9z^2 - 6xz + 2x^2\right)$.
4. $\left(8x^4 + 20x^2y^2 + 25y^4\right)\left(8x^4 - 20x^2y^2 + 25y^4\right)$.
5. $\left(5 - 4x + x^2\right)\left(1 + x^2\right)$.

Lección 18

Factorización
Ejercicios I

En esta lección realizaremos ejercicios aplicando los temas de factorización estudiados en las lecciones anteriores.

Algunas recomendaciones para factorizar un polinomio, teniendo en cuenta los temas de factorización estudiados hasta el momento, son:

- Primero observamos si todos los términos tienen un factor común. En caso afirmativo, sacamos el mayor factor común de los coeficientes y el factor común de mayor grado de la parte literal. Revisamos el segundo factor obtenido para ver si puede factorizarse de nuevo.
- Si los términos del polinomio dado no tienen un factor común, debemos tener en cuenta lo siguiente:
  - Cuando el polinomio dado sólo tiene dos términos:

    Si es la diferencia de dos cuadrados perfectos, lo factorizamos recordando que

    $$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

    Si es la suma de dos cuadrados perfectos, en algunos casos, la podemos convertir en un trinomio cuadrado perfecto para factorizarla.
  - Cuando el polinomio dado es un trinomio:

    Si es un trinomio cuadrado perfecto, lo factorizamos recordando que

    $$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 .$$

    Si no es un trinomio cuadrado perfecto, analizamos si es posible convertirlo en un trinomio cuadrado perfecto.

    En las siguientes lecciones veremos cómo factorizar otros tipos de trinomios.
  - Cuando el polinomio a factorizar tiene más de tres términos, debemos analizar los términos y tratar de agruparlos adecuadamente para obtener, en algunos casos, un factor común o una diferencia de cuadrados.

Ejemplo 18.1

Factorizar:

1. $4x^5 - 12x^4 - 16x^3 + 48x^2$.
2. $36y^2 - 4x^2 + 20x - 25$.
3. $64x^8 + y^8$.
4. $(y-1)^2(y+2) - (y-1)(y+2)^2$.
5. $1 + \dfrac{2}{3}b + \dfrac{b2}{9}$.

Solución

1. Como 4 es el mayor factor común de los coeficentes y x^2 es el único factor común literal entonces
$$4x^5 - 12x^4 - 16x^3 + 48x^2 = 4x^2\left(x^3 - 3x^2 - 4x + 12\right).$$
Si en el polinomio entre paréntesis agrupamos los dos primeros términos y los dos últimos obtenemos:
$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 4x + 12 &= \left(x^3 - 3x^2\right) - (4x - 12) \\ &= x^2(x-3) - 4(x-3) && \text{Factor común en cada paréntesis} \\ &= (x-3)\left(x^2 - 4\right) && \text{Factor común } x-3 \\ &= (x-3)(x+2)(x-2) && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados.} \end{aligned}$$
Luego,
$$4x^5 - 12x^4 - 16x^3 + 48x^2 = 4x^2(x-3)(x+2)(x-2).$$

2. Si agrupamos los últimos tres términos del polinomio dado en un paréntesis precedido de signo $-$, el trinomio que queda en el paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto:
$$\begin{aligned} 36y^2 - 4x^2 + 20x - 25 &= 36y^2 - \left(4x^2 - 20x + 25\right) \\ &= (6y)^2 - (2x-5)^2 && \text{Factorizamos el trinomio} \\ &= [6y + (2x-5)][6y - (2x-5)] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados.} \\ &= (6y + 2x - 5)(6y - 2x + 5). \end{aligned}$$
Luego
$$36y^2 - 4x^2 + 20x - 25 = (6y + 2x - 5)(6y - 2x + 5).$$

3. Como $64x^8 + y^8 = \left(8x^4\right)^2 + \left(y^4\right)^2$ es una suma de cuadrados, podemos completar un trinomio cuadrado perfecto sumando un término igual a $2(8x^4)(y^4) = 16x^4y^4$, y para que el polinomio dado no varíe restamos ese mismo término.

$64x^8 + y^8$	$= 64x^8 + y^8 + 16x^4y^4 - 16x^4y^4$	Sumamos y restamos $16x^4y^4$
	$= (64x^8 + 16x^4y^4 + y^8) - 16x^4y^4$	Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos
	$= (8x^4 + y^4)^2 - \left(4x^2y^2\right)^2$	Factorizamos el trinomio
	$= [(8x^4 + y^4) + 4x^2y^2][(8x^4 + y^4) - 4x^2y^2]$	Factorizamos la diferencia de cuadrados
	$= (8x^4 + 4x^2y^2 + y^4)(8x^4 - 4x^2y^2 + y^4)$	Ordenamos cada factor respecto a la letra x.

Luego,

$$64x^8 + y^8 = (8x^4 + 4x^2y^2 + y^4)(8x^4 - 4x^2y^2 + y^4).$$

4. Como $(y-1)(y+2)$ es el factor común de mayor grado, entonces,

$$\begin{aligned}(y-1)^2(y+2) - (y-1)(y+2)^2 &= (y-1)(y+2)[(y-1)-(y+2)] \\ &= (y-1)(y+2)(-3) \\ &= -3(y-1)(y+2).\end{aligned}$$

Luego,

$$(y-1)^2(y+2) - (y-1)(y+2)^2 = -3(y-1)(y+2).$$

5. $1 + \dfrac{2}{3}b + \dfrac{b^2}{9}$ es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$1 = 1^2 \quad , \quad \frac{b^2}{9} = \left(\frac{b}{3}\right)^2 \quad \text{y} \quad \frac{2}{3}b = 2(1)\left(\frac{b}{3}\right).$$

Luego,

$$1 + \frac{2}{3}b + \frac{b^2}{9} = \left(1 + \frac{1}{3}b\right)^2.$$

Ejemplo 18.2

Factorizar:

1. $4x^2 - 12ax - z^2 - c^2 - 2cz + 9a^2$.
2. $25(x+1)^2 - 30(x+1) + 9$.
3. $4x^4 + 9y^4 - 93x^2y^2$.
4. $9x^2 - 42xy + 49y^2$.
5. $90x^2y - 108x^4y^4z^2 - 162x^3y^2z^2$.

Solución

1. Observando el polinomio $4x^2 - 12ax - z^2 - c^2 - 2cz + 9a^2$ vemos que si agrupamos los términos que tienen las letras x ó a, éstos forman un trinomio cuadrado perfecto. Lo mismo sucede si agrupamos, en un paréntesis precedido de signo menos, los términos que tienen las letras z ó c. Así,

$$\begin{aligned}
&4x^2 - 12ax - z^2 - c^2 - 2cz + 9a^2\\
&\quad = \left(4x^2 - 12ax + 9a^2\right) - \left(z^2 + 2cz + c^2\right) && \text{Ordenamos y agrupamos términos}\\
&\quad = (2x - 3a)^2 - (z + c)^2 && \text{Factorizamos los trinomios}\\
&\quad = [(2x - 3a) + (z + c)]\,[(2x - 3a) - (z + c)] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&\quad = (2x - 3a + z + c)\,(2x - 3a - z - c)\,.
\end{aligned}$$

2. Como $25\,(x+1)^2 = [5(x+1)]^2$, $9 = 3^2$ y $30\,(x+1) = 2\,[5(x+1)]\,(3)$ entonces $25\,(x+1)^2 - 30\,(x+1) + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto. Luego,

$$25\,(x+1)^2 - 30\,(x+1) + 9 = [5(x+1) - 3])^2 = (5x+2)^2\,.$$

3. $4x^4 + 9y^4 - 93x^2y^2 = 4x^4 - 93x^2y^2 + 9y^4$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque $4x^4 = (2x^2)^2$, $9y^4 = (3y^2)^2$ y $2(2x^2)(3y^2) = 12x^2y^2 \neq 93x^2y^2$.

   Se tendría un trinomio cuadrado perfecto si el segundo término fuera $-12x^2y^2$ y una manera de obtenerlo es descomponer $-93x^2y^2$ como $-12x^2y^2 - 81x^2y^2$. Así,

$$\begin{aligned}
&4x^4 + 9y^4 - 93x^2y^2\\
&\quad = 4x^4 + 9y^4 - 12x^2y^2 - 81x^2y^2 && \text{Descomponemos } -93x^2y^2\\
&\quad = \left(4x^4 - 12x^2y^2 + 9y^4\right) - 81x^2y^2 && \text{Reorganizamos y agrupamos términos}\\
&\quad = \left(2x^2 - 3y^2\right)^2 - (9xy)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&\quad = \left[\left(2x^2 - 3y^2\right) + 9xy\right]\left[\left(2x^2 - 3y^2\right) - 9xy\right] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&\quad = \left(2x^2 + 9xy - 3y^2\right)\left(2x^2 - 9xy - 3y^2\right) && \text{Ordenamos cada factor respecto}\\
& && \text{a la letra } x.
\end{aligned}$$

   Así,

$$4x^4 + 9y^4 - 93x^2y^2 = \left(2x^2 + 9xy - 3y^2\right)\left(2x^2 - 9xy - 3y^2\right).$$

4. $9x^2 - 42xy + 49y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto porque $9x^2 = (3x)^2$, $49y^2 = (7y)^2$ y $42xy = 2\,(3x)\,(7y)$. Luego,

$$9x^2 - 42xy + 49y^2 = (3x - 7y)^2\,.$$

5. En $90x^2y - 108x^4y^4z^2 - 162x^3y^2z^2$ el factor común literal de mayor grado es x^2y. Hallemos el mayor factor común de los coeficientes descomponiendo 90, 108 y 162 en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2\\ 45 & 3\\ 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l} 108 & 2\\ 54 & 2\\ 27 & 3\\ 9 & 3\\ 3 & 3\\ 1 & \end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l} 162 & 2\\ 81 & 3\\ 27 & 3\\ 9 & 3\\ 3 & 3\\ 1 & \end{array}$$

Como $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $108 = 2^2 \cdot 3^3$ y $162 = 2 \cdot 3^4$ entonces el mayor factor común de los coeficientes es $2 \cdot 3^2 = 18$. Luego,

$$90x^2y - 108x^4y^4z^2 - 162x^3y^2z^2 = 18x^2y\left(5 - 6x^2y^3z^2 - 9xyz^2\right).$$

Ejercicios propuestos

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $x^3 - x^2 - x + 1$.
2. $\left(4 + \dfrac{1}{a}\right)^2 - \left(4 - \dfrac{1}{a}\right)^2$.
3. $x^{18}y^2 - 16x^2y^6$.
4. $a^8 - 28a^4 + 36$.
5. $x^{10} - x^8 + x^4 - x^6$.

Respuestas

1. $(x-1)^2(x+1)$.
2. $\dfrac{16}{a}$.
3. $x^2y^2\left(x^8 + 4y^2\right)\left(x^4 + 2y\right)\left(x^4 - 2y\right)$.
4. $\left(a^4 + 4a^2 - 6\right)\left(a^4 - 4a^2 - 6\right)$.
5. $x^4\left(x^2 + 1\right)(x+1)^2(x-1)^2$.

Lección 19

Factorización
Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

En esta lección aprenderemos a factorizar algunos trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.

De los productos notables sabemos que

$$(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq.$$

El lado derecho de esta igualdad es un polinomio de la forma $x^2 + bx + c$, con $b = p + q$ y $c = pq$. Por tanto, si queremos expresar un polinomio de la forma $x^2 + bx + c$ como el producto de dos factores $x + p$ y $x + q$, debemos encontrar p y q tales que su producto sea c, es decir $c = pq$, y su suma sea b, o sea $p + q = b$.

Ejemplo 19.1

Expresar los siguientes polinomios como producto de dos factores de grado 1:

1. $x^2 + 10x + 21$.
2. $c^2 - 9c + 20$.
3. $y^2 - 4y + 3$.
4. $28 + a^2 - 11a$.
5. $36 + 5x - x^2$.

Solución

1. Veamos si el polinomio $x^2 + 10x + 21$ se puede expresar de la forma $(x + p)(x + q)$, o sea, si hay dos números p y q tales que $pq = 21$ y $p + q = 10$.

   Las formas de expresar 21 como el producto de dos enteros son: $(21)(1)$, $(-21)(-1)$, $(7)(3)$ y $(-7)(-3)$. Ahora como $21 + 1 \neq 10$, $-21 - 1 \neq 10$, $7 + 3 = 10$ y $-7 - 3 \neq 10$, entonces los únicos números que cumplen la condición son 7 y 3. Por tanto escribimos el polinomio dado como producto de dos factores así,

$$x^2 + 10x + 21 = (x + 7)(x + 3).$$

2. Las formas de expresar 20 como el producto de dos enteros son: $(20)(1)$, $(-20)(-1)$, $(10)(2)$, $(-10)(-2)$, $(5)(4)$ y $(-5)(-4)$. Ahora como $20 + 1 \neq -9$, $-20 - 1 \neq -9$,

$10+2 \neq -9$, $-10-2 \neq -9$, $5+4 \neq -9$ y $-5-4=-9$, entonces los únicos números que cumplen la condición son -5 y -4. Por tanto,

$$c^2 - 9c + 20 = (c-5)(c-4).$$

3. Las formas de expresar 3 como el producto de dos enteros son: $(3)(1)$ y $(-3)(-1)$. Como $3+1 \neq -4$ y $-3-1=-4$, los únicos números que cumplen la condición son -3 y -1. Entonces,

$$y^2 - 4y + 3 = (y-3)(y-1).$$

4. Aunque el polinomio $28 + a^2 - 11a$ aparentemente no es de la forma $x^2 + bx + c$, si lo organizamos adecuadamente tenemos,

$$28 + a^2 - 11a = a^2 - 11a + 28.$$

Las formas de expresar 28 como el producto de dos enteros son: $(28)(1)$, $(-28)(-1)$, $(14)(2)$, $(-14)(-2)$, $(7)(4)$ y $(-7)(-4)$. Ahora como $28+1 \neq -11$, $-28-1 \neq -11$, $14+2 \neq -11$, $-14-2 \neq -11$, $7+4 \neq -11$ y $-7-4=-11$, entonces los únicos números que cumplen la condición son -7 y -4. Por tanto,

$$28 + a^2 - 11a = a^2 - 11a + 28 = (a-7)(a-4).$$

5. Organizamos el trinomio en la forma $-x^2 + 5x + 36$.

Como el coeficiente de x^2 es -1, sacamos factor común -1 y así,

$$-x^2 + 5x + 36 = -\left(x^2 - 5x - 36\right).$$

Factoricemos el polinomio que está entre paréntesis. Las formas de expresar -36 como el producto de dos enteros son: $(36)(-1)$, $(-36)(1)$, $(18)(-2)$, $(-18)(2)$, $(12)(-3)$, $(-12)(3)$, $(9)(-4)$, $(-9)(4)$ y $(6)(-6)$. Ahora como $36-1 \neq -5$, $-36+1 \neq -5$, $18-2 \neq -5$, $-18+2 \neq -5$, $12-3 \neq -5$, $-12+3 \neq -5$, $9-4 \neq -5$, $-9+4=-5$ y $6-6 \neq -5$, entonces los únicos números que cumplen la condición son -9 y 4 y así $x^2 - 5x - 36 = (x-9)(x+4)$. Luego,

$$36 + 5x - x^2 = -\left(x^2 - 5x - 36\right) = -(x-9)(x+4) = (9-x)(x+4).$$

¿Por qué?

Nota:

Con la práctica, los números p y q tales que $x^2 + bx + c = (x+p)(x+q)$ se pueden hallar por tanteo, sin necesidad de escribir todos los productos de dos números que sean iguales a c.

Ejemplo 19.2

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $x^2 - 26x + 165$.

2. $110 - x - x^2$.

3. $x^4 - 14x^2 - 51$.

4. $(3x+2)^2 + 8(3x+2) + 12$.

Solución

1. Debemos hallar dos números enteros tales que su producto sea 165 y su suma sea -26.

   Para hallar los factores de 165, lo descomponemos en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

   Entre los dos posibles factores de 165, cuyo producto sea 165, escogemos -15 y -11 ya que $-15 + (-11) = -26$. Luego,

$$x^2 - 26x + 165 = (x-15)(x-11).$$

2. Organizamos el trinomio en la forma $-x^2 - x + 110$.

   Como el coeficiente de x^2 es -1, sacamos factor común -1 y así,

$$-x^2 - x + 110 = -\left(x^2 + x - 110\right).$$

   Factoricemos el polinomio $x^2 + x - 110$ que está entre paréntesis. Para ello descomponemos 110 en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

   Como la suma de los dos factores debe ser 1, los factores cuyo producto es -110, que cumplen esta condición son -10 y 11, y así $x^2 + x - 110 = (x-10)(x+11)$. Luego,

$$110 - x - x^2 = -\left(x^2 + x - 110\right) = -(x-10)(x+11) = (10-x)(x+11).$$

3. $x^4 - 14x^2 - 51 = (x^2)^2 - 14x^2 - 51$.

   Podemos ver el polinomio dado como un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, con x^2 en el lugar de x. Para factorizarlo debemos hallar dos números cuyo producto sea -51 y cuya suma sea -14.

   Como

$$\begin{array}{r|l} 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

   los factores de -51 cuya suma es -14 son 3 y -17. Luego,

$$x^4 - 14x^2 - 51 = (x^2)^2 - 14x^2 - 51 = (x^2+3)(x^2-17).$$

4. Al igual que en el ejemplo anterior, podemos ver el polinomio $(3x+2)^2+8(3x+2)+12$ en la forma x^2+bx+c, con $3x+2$ en el lugar de x. Para factorizarlo, encontramos que 6 y 2 son dos números cuyo producto es 12 y su suma es 8 y así:

$$(3x+2)^2+8(3x+2)+12=[(3x+2)+6][(3x+2)+2]=(3x+8)(3x+4).$$

Nota:

En los dos ejemplos anteriores tenemos expresiones de la forma $(\square)^2+b(\square)+c$ donde $\square$ representa a su vez una expresión algebraica. Si es posible hallar dos números p y q cuyo producto sea c y su suma b entonces podemos factorizar la expresión dada así:

$$(\square)^2+b(\square)+c=(\square+p)(\square+q).$$

Observemos que en el lado derecho de la igualdad, el primer término de cada factor es la expresión algebraica representada por $\square$.

Ejemplo 19.3

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $65+8xy-x^2y^2$.
2. $x^2+17xy+60y^2$.
3. x^6-7x^3-8.

Solución

1. Organizamos el polinomio dado y sacamos factor común -1:

$$65+8xy-x^2y^2=-x^2y^2+8xy+65=-(x^2y^2-8xy-65).$$

El trinomio que está entre paréntesis lo podemos ver en la forma x^2+bx+c si consideramos a xy en lugar de x :

$$x^2y^2-8xy-65=(xy)^2-8(xy)-65.$$

Hallemos dos números cuyo producto sea -65 y cuya suma algebraica sea -8. Como

$$\begin{array}{r|l} 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

los factores de -65 cuya suma es -8 son 5 y -13. Luego,

$$x^2y^2-8xy-65=(xy)^2-8xy-65=(xy+5)(xy-13).$$

Y así,

$$65+8xy-x^2y^2=-(x^2y^2-8xy-65)=-(xy+5)(xy-13)=(xy+5)(13-xy).$$

2. Este polinomio lo podemos considerar en la forma $x^2 + bx + c$ con $a = 1$, $b = 17y$ y $c = 60y^2$. Debemos entonces hallar dos números cuyo producto sea $60y^2$ y cuya suma sea $17y$.

   Descomponemos 60 en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

   Los factores de $60b^2$ cuya suma es $17b$ son $12b$ y $5b$ ya que $(12b)(5b) = 60b^2$ y $12b+5b = 17b$. Luego,

$$a^2 + 17ab + 60b^2 = (a + 12b)(a + 5b).$$

3. El polinomio $x^6 - 7x^3 - 8 = (x^3)^2 - 7x^3 - 8$ se puede ver en la forma $x^2 + bx + c$ si en el lugar de x tenemos x^3.

   Debemos hallar dos números cuyo producto sea -8 y cuya suma algebraica sea -7. Estos números son -8 y 1 y así

$$x^6 - 7x^3 - 8 = (x^3)^2 - 7x^3 - 8 = (x^3 - 8)(x^3 + 1).$$

   Observemos que los factores $x^3 - 8 = x^3 - 2^3$ y $x^3 + 1 = x^3 + 1^3$ son una diferencia de cubos y una suma de cubos respectivamente, que más adelante veremos cómo factorizarlas.

Ejercicios propuestos

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $x^2 - 9x - 90$.
2. $-x^2 + 13x - 36$.
3. $45 - 12xy - x^2y^2$.
4. $x^4 - 8x^2 - 9$
5. $(a - 1)^2 + 3(a - 1) - 108$.
6. $x^2 - 23xy + 76y^2$.

Respuestas

1. $(x + 6)(x - 15)$.
2. $(x - 9)(4 - x)$.
3. $(xy + 15)(3 - xy)$.
4. $(x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$.

5. $(a + 11)(a - 10)$.
6. $(x - 19y)(x - 4y)$.

Lección 20

Factorización
Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$

En esta lección aprenderemos a factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ para los cuales $a \neq 1$, reduciéndolos a la forma $x^2 + bx + c$, que ya sabemos factorizar. Luego veremos como factorizar estos trinomios por tanteo. Presentaremos ejemplos resueltos por las dos formas y dejaremos algunos propuestos al lector para que practique la factorización de estos trinomios.

Si multiplicamos y dividimos por a, con $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el trinomio $ax^2 + bx + c$, obtenemos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \frac{a\left(ax^2 + bx + c\right)}{a} \\ &= \frac{a^2x^2 + abx + ac}{a} \\ &= \frac{(ax)^2 + b\,(ax) + ac}{a}. \end{aligned}$$

Observamos que el trinomio $(ax)^2 + b\,(ax) + ac$ es de la forma $u^2 + bu + d$ con $u = ax$, que ya sabemos factorizar.

Ejemplo 20.1

Factorizar el polinomio $6x^2 + 11x - 21$.

Solución

Como 6 es el coeficiente de x^2, multiplicamos y dividimos $6x^2 + 11x - 21$ por 6 y organizamos el trinomio para llevarlo a la forma conocida:

$$\begin{aligned} 6x^2 + 11x - 21 &= \frac{6\left(6x^2 + 11x - 21\right)}{6} \\ &= \frac{6^2x^2 + 6(11x) + 6(-21)}{6} \\ &= \frac{(6x)^2 + 11\,(6x) - 126}{6}. \end{aligned}$$

Para factorizar el polinomio $(6x)^2 + 11\,(6x) - 126$, debemos hallar dos números cuyo producto sea -126 y cuya suma sea 11. Para ello descompongamos 126 en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Como $-126 = 18(-7)$ y $18 - 7 = 11$, entonces esos números son 18 y -7. Luego,

$$(6x)^2 + 11\,(6x) - 126 = (6x + 18)\,(6x - 7)\,.$$

Observamos que el primer factor tiene a su vez factor común 6. Entonces,

$$(6x)^2 + 11\,(6x) - 126 = 6(x + 3)\,(6x - 7)\,.$$

Y así,

$$6x^2 + 11x - 21 = \frac{6(x+3)(6x-7)}{6} = (x+3)(6x-7).$$

Luego, $6x^2 + 11x - 21 = (x + 3)(6x - 7)$.

Aunque algunas veces es fácil hallar los factores del término independiente, en otros se recomienda la descomposición en factores primos, como hicimos en este ejemplo.

Ejemplo 20.2

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $18x^2 - 13x - 5$.
2. $20x^2 + 7x - 6$.
3. $12x^2y^2 + xy - 20$.
4. $6x^2 - 11dx - 10d^2$.

Solución

1. En este caso $a = 18$ entonces,

$$\begin{aligned} 18x^2 - 13x - 5 &= \frac{18\,(18x^2 - 13x - 5)}{18} && \text{Multiplicamos y dividimos el trinomio por 18} \\ &= \frac{(18x)^2 - 13(18x) - 90}{18} && \text{Organizamos el trinomio del numerador} \\ &= \frac{(18x - 18)(18x + 5)}{18} && \text{Factorizamos el trinomio del numerador} \\ &= \frac{18(x-1)(18x+5)}{18} && \text{Factor común 18} \\ &= (x-1)(18x+5) && \text{Simplificamos.} \end{aligned}$$

Luego, $18x^2 - 13x - 5 = (x - 1)(18x + 5)$.

2. En este caso $a = 20$ entonces,

$$\begin{aligned}
20x^2 + 7x - 6 &= \frac{(20x)^2 + 7(20x) - 120}{20} && \text{Multiplicamos y dividimos el trinomio por 20}\\
&= \frac{(20x+15)(20x-8)}{20} && \text{Factorizamos el trinomio del numerador}\\
&= \frac{5(4x+3)4(5x-2)}{20} && \text{Factores comunes 5 y 4}\\
&= (4x+3)(5x-2) && \text{Simplificamos.}
\end{aligned}$$

Luego, $20x^2 + 7x - 6 = (4x+3)(5x-2)$.

3. En este caso $a = 12$ entonces,

$$\begin{aligned}
12x^2y^2 + xy - 20 &= \frac{(12xy)^2 + (12xy) - 240}{12} && \text{Multiplicamos y dividimos el trinomio por 12}\\
&= \frac{(12xy+16)(12xy-15)}{12} && \text{Factorizamos el trinomio del numerador}\\
&= \frac{4(3xy+4)3(4xy-5)}{12} && \text{Factores comunes 4 y 3}\\
&= (3xy+4)(4xy-5) && \text{Simplificamos.}
\end{aligned}$$

Luego, $12x^2y^2 + xy - 20 = (3xy+4)(4xy-5)$.

4. Como $a = 6$, $b = -11d$ y $c = -10d^2$, entonces,

$$\begin{aligned}
6x^2 - 11dx - 10d^2 &= \frac{(6x)^2 - 11d(6x) - 60d^2}{6} && \text{Multiplicamos y dividimos el trinomio por 6}\\
&= \frac{(6x-15d)(6x+4d)}{6} && \text{Factorizamos el trinomio del numerador}\\
&= \frac{3(2x-5d)2(3x+2d)}{6} && \text{Factores comunes 3 y 2}\\
&= (2x-5d)(3x+2d) && \text{Simplificamos.}
\end{aligned}$$

Luego, $6x^2 - 11dx - 10d^2 = (2x-5d)(3x+2d)$.

Veamos que para factorizar este tipo de trinomios no necesitamos realizar el procedimiento que hemos aplicado hasta ahora.

Como

$$(px+r)(qx+s) = pqx^2 + (ps+rq)x + rs,$$

el lado derecho de esta igualdad es un polinomio de la forma ax^2+bx+c con $a = pq$, $b = ps+rq$ y $c = rs$. Luego, para factorizar un trinomio $ax^2 + bx + c$ en la forma $(px+r)(qx+s)$, debemos encontrar $p,\ q,\ r$ y s tales que $pq = a$, $ps + rq = b$ y $rs = c$.

Así como cuando factorizamos trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, encontrábamos por tanteo los números p y q tales que $x^2 + bx + c = (x+p)(x+q)$, con la práctica podemos encontrar por tanteo $p,\ q,\ r$ y s tales que $pq = a$, $ps + rq = b$ y $rs = c$, y así

$$ax^2 + bx + c = (px+r)(qx+s).$$

Ejemplo 20.3

Factorizar, hallando p, q, r y s por tanteo, los siguientes polinomios:

1. $6x^2 - 31x + 35$.
2. $20 - 9x - 20x^2$.
3. $4x^2 - 7xy - 15y^2$.
4. $18a^2 + 17ay - 15y^2$.
5. $21x^2 - 26xy - 72y^2$.

Solución

1. Debemos hallar dos números cuyo producto sea $a = 6$ y dos números cuyo producto sea $c = 35$. Para ello hallemos los factores de estos números.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Como $-31 = 2(-5) + 3(-7)$ entonces $p = 2$, $q = 3$, $r = -7$ y $s = -5$, y así

$$6x^2 - 31x + 35 = (2x - 7)(3x - 5).$$

2. Como $20 - 9x - 20x^2 = -\left(20x^2 + 9x - 20\right)$, factorizamos el polinomio $20x^2 + 9x - 20$ que está entre paréntesis. Para ello debemos hallar dos números cuyo producto sea 20:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Como $9 = 4(-4) + 5(5)$ entonces,

$$20x^2 + 9x - 20 = (4x + 5)(5x - 4).$$

Luego,

$$20 - 9x - 20x^2 = -(20x^2 + 9x - 20) = -(4x + 5)(5x - 4) = (4x + 5)(4 - 5x).$$

3. Como 4 y 1 son dos números cuyo producto es 4, -3 y 5 son dos números cuyo producto es -15 y como $-7 = 4(-3) + 1(5)$ entonces,

$$4x^2 - 7xy - 15y^2 = (x - 3y)(4x + 5y).$$

4. Hallemos dos números cuyo producto sea 18 y dos cuyo producto sea 15:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ & \end{array}$$

Como $17 = 2(-5) + 9(3)$ entonces

$$18a^2 + 17ay - 15y^2 = (2a + 3y)(9a - 5y).$$

5. Hallemos dos números cuyo producto sea 21 y dos cuyo producto sea 72:

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Como $-26 = 3(-18) + 7(4)$ entonces,

$$21x^2 - 26xy - 72y^2 = (3x + 4y)(7x - 18y).$$

Ejercicios propuestos

Factorizar:

1. $5x^2 + 13x - 6$.
2. $8a^2 - 14a - 15$.
3. $44n + 20n^2 - 15$.
4. $6x^4 + 5x^2 - 6$.
5. $30m^2 + 17am - 21a^2$.

Respuestas

1. $(5x - 2)(x + 3)$.
2. $(4a + 3)(2a - 5)$.
3. $(10n - 3)(2n + 5)$.
4. $(3x^2 - 2)(2x^2 + 3)$.
5. $(6m + 7a)(5m - 3a)$.

Lección 21

Factorización
Cubo de binomios

En esta lección estudiaremos cómo factorizar algunos polinomios de cuatro términos con características especiales.

En la lección de productos notables se vieron los siguientes casos:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

El lado derecho de estas igualdades se conoce como **cubo perfecto de binomios** o simplemente **cubo de binomios**.

Para que un polinomio ordenado en forma descendente respecto a una letra a sea el cubo de un binomio $a+b$, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Que tenga cuatro términos, todos con signo positivo.
2. Que el primero y último términos sean cubos perfectos, siendo estos a^3 y b^3 respectivamente.
3. Que el segundo término sea $3a^2b$ y que el tercer término sea $3ab^2$.

Es decir, si se cumplen estas condiciones el polinomio se factoriza como $(a+b)^3$.

De igual forma se deben cumplir condiciones similares a las anteriores para que un polinomio se factorice como el cubo de un binomio $a-b$. En este caso, ordenados los términos, los signos deben ser alternadamente positivos y negativos.

Ejemplo 21.1

1. Dado el polinomio $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$, determinar si cumple las condiciones para ser el cubo de un binomio.
2. Ver si el polinomio $a^6 - 6a^4 + 12a^2 - 8$ es el cubo de un binomio.
3. Factorizar, si es posible, el polinomio $1 + 12a + 48a^2 + 64a^3$.
4. Factorizar $\dfrac{x^3}{8} + \dfrac{x^2y}{4} + \dfrac{xy^2}{6} + \dfrac{y^3}{27}$.

Solución

1. El polinomio tiene cuatro términos, todos con signo positivo.

   $8x^3$ es un cubo perfecto porque $8x^3 = (2x)^3$.

   1 es un cubo perfecto porque $1 = (1)^3$.

   $3\,(2x)^2\,(1) = 12x^2$ es el segundo término.

   $3\,(2x)\,(1)^2 = 6x$ es el tercer término.

   Se cumplen las condiciones y por tanto el polinomio dado es el cubo de $2x+1$, es decir,

$$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x+1)^3\,.$$

2. El polinomio tiene cuatro términos, con signos alternadamente positivos y negativos. a^6 es un cubo perfecto porque $a^6 = (a^2)^3$.

   8 es un cubo perfecto porque $8 = 2^3$.

   $-3\,(a^2)^2\,(2) = -6a^4$ es el segundo término.

   $3\,(a^2)\,(2)^2 = 12a^2$ es el tercer término.

   Luego, el polinomio dado es el cubo del binomio $a^2 - 2$, es decir,

$$a^6 - 6a^4 + 12a^2 - 8 = \left(a^2 - 2\right)^3.$$

3. Para saber si es factorizable como el cubo de un binomio, veamos si se cumplen las condiciones para ello: son cuatro términos todos con signo positivo, $1 = 1^3$, $64a^3 = (4a)^3$, $3\,(1)^2\,(4a) = 12a$ es el segundo término y $3\,(1)\,(4a)^2 = 48a^2$ es el tercer término. Por tanto, el polinomio representa el cubo del binomio $1 + 4a$, es decir,

$$1 + 12a + 48a^2 + 64a^3 = (1+4a)^3\,.$$

4. Son cuatro términos todos con signo positivo, $\dfrac{x^3}{8} = \left(\dfrac{x}{2}\right)^3$, $\dfrac{y^3}{27} = \left(\dfrac{y}{3}\right)^3$, $3\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\left(\dfrac{y}{3}\right) = \dfrac{x^2y}{4}$ que es el segundo término y $3\left(\dfrac{x}{2}\right)\left(\dfrac{y}{3}\right)^2 = \dfrac{xy^2}{6}$ que es el tercer término. Luego, el polinomio dado es el cubo del binomio $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3}$, es decir,

$$\frac{x^3}{8} + \frac{x^2y}{4} + \frac{xy^2}{6} + \frac{y^3}{27} = \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^3.$$

Ejemplo 21.2

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $1 + 3a^2 - 3a - a^3$.

2. $x^6 + 3x^4y^3 + 3x^2y^6 + y^9$.

3. $3a^{12} + 1 + 3a^6 + a^{18}$.

4. $125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3$.

Solución

1. $$\begin{aligned} 1 + 3a^2 - 3a - a^3 &= 1 - 3a + 3a^2 - a^3 && \text{Reorganizamos los términos} \\ &= 1^3 - 3(1)^2a + 3a^2(1) - a^3 && \text{Cumple las condiciones para ser un cubo perfecto} \\ &= (1-a)^3. \end{aligned}$$

2. Como $x^6 = (x^2)^3$ es un cubo perfecto, $y^9 = (y^3)^3$ es un cubo perfecto, $3(x^2)^2y^3 = 3x^4y^3$ es el segundo término y $3x^2(y^3)^2 = 3x^2y^6$ es el tercer término, se cumplen las condiciones para ser el cubo de un binomio. Luego,

$$\begin{aligned} x^6 + 3x^4y^3 + 3x^2y^6 + y^9 &= (x^2)^3 + 3(x^2)^2y^3 + 3x^2(y^3)^2 + (y^3)^3 \\ &= (x^2 + y^3)^3. \end{aligned}$$

3. Ordenando los términos con respecto a la letra a tenemos que

$$3a^{12} + 1 + 3a^6 + a^{18} = a^{18} + 3a^{12} + 3a^6 + 1.$$

Como $a^{18} = (a^6)^3$ es un cubo perfecto, $1 = (1)^3$ es un cubo perfecto, $3(a^6)^2(1) = 3a^{12}$ es el segundo término y $3(a^6)(1)^2 = 3a^6$ es el tercer término, se cumplen las condiciones para ser un cubo perfecto y por tanto,

$$3a^{12} + 1 + 3a^6 + a^{18} = (a^6)^3 + 3(a^6)^2(1) + 3a^6(1)^2 + 1^3 = (a^6 + 1)^3.$$

4. Como $125a^3 = (5a)^3$ es un cubo perfecto, $8b^3 = (2b)^3$ es un cubo perfecto, $3(5a)^2(2b) = 150a^2b$ es el segundo término y $3(5a)(2b)^2 = 60ab^2$ es el tercer término, se cumplen las condiciones para ser un cubo perfecto y por tanto,

$$125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3 = (5a + 2b)^3.$$

Ejemplo 21.3

En cada numeral, determinar si el polinomio dado cumple las condiciones para ser el cubo de un binomio y si es así, factorizarlo.

1. $27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$.

2. $125a^3 - 300a^2b + 60ab^2 - 64b^3$.

3. $y^9 + 18y^6 + 36y^3 + 216$.

Solución

1. Tenemos que:

$27x^3 = (3x)^3$ es un cubo perfecto, $8 = (2)^3$ es un cubo perfecto, $3(3x)^2(2) = 54x^2$ es el segundo término y $3(3x)(2)^2 = 36x$ es el tercer término.

Como se cumplen las cuatro condiciones y todos sus términos tienen signo positivo, el polinomio se factoriza como la suma de un binomio al cubo. Así,

$$27x^3 + 54x^2 + 36x + 8 = (3x + 2)^3.$$

2. Veamos si se cumplen las condiciones para que este polinomio sea el cubo de un binomio:

   $125a^3 = (5a)^3$ es un cubo perfecto, $8b^3 = (2b)^3$ es un cubo perfecto, $3(5a)^2(4b) = 300a^2b$ es el segundo término y $3(5a)(4b)^2 = 60ab^2$ es el tercer término.

   Por tanto, se cumplen las condiciones y como los signos son alternadamente positivos y negativos, entonces,

$$125a^3 - 300a^2b + 60ab^2 - 64b^3 = (5a - 4b)^3.$$

3. Tenemos que:

   $y^9 = (y^3)^3$ es un cubo perfecto, $216 = (6)^3$ es un cubo perfecto, $3(y^3)^2(6) = 18y^6$ es el segundo término, pero $3(y^3)(6)^2 = 108y^3 \neq 36y^3$.

   Como el tercer término no cumple la condición, el polinomio dado no es factorizable como el cubo de un binomio.

Ejercicios propuestos

Factorizar:

1. $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$.
2. $x^9 - 9x^6y^4 + 27x^3y^8 - 27y^{12}$.
3. $1 + 18a^2b^3 + 108a^4b^6 + 216a^6b^9$.
4. $z^6 + 6z^4w^3 + 12z^2w^6 + 8w^9$.
5. $(a + b)^6 - 12(a + b)^4(a - b)^2 + 48(a + b)^2(a - b)^4 - 64(a - b)^6$.

Respuestas

1. $(2a - 3b)^3$.
2. $(x^3 - 3y^4)^3$.
3. $(1 + 6a^2b^3)^3$.
4. $(z^2 + 2w^3)^3$.
5. $(3a - b)^3(3b - a)^3$.

Lección 22

Factorización
Suma o diferencia de cubos

En esta lección estudiaremos la factorización de polinomios que tienen la forma de una suma o de una diferencia de cubos.

Dos productos, que pueden considerarse como productos notables, son:

$$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$$
$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3.$$

Estas igualdades, escritas como

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$
$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

nos muestran como factorizar una suma o una diferencia de cubos.

Ejemplo 22.1

Factorizar los siguientes polinomios:

1. a^3-8.
2. $8x^3+125$.
3. $27m^3+64n^9$.
4. $\dfrac{x^6}{125}-\dfrac{y^3}{8}$.

Solución

1. $$\begin{aligned} a^3-8 &= a^3-2^3 && \text{Diferencia de cubos} \\ &= (a-2)\left(a^2+2a+4\right) && \text{Factorizamos la diferencia de cubos.} \end{aligned}$$

   Luego,
   $$a^3-8=(a-2)\left(a^2+2a+4\right).$$

2. $$\begin{aligned} 8x^3+125 &= (2x)^3+5^3 && \text{Suma de cubos} \\ &= (2x+5)\left((2x)^2-(2x)5+5^2\right) && \text{Factorizamos la suma de cubos.} \\ &= (2x+5)\left(4x^2-10x+25\right). \end{aligned}$$

Luego,

$$8x^3 + 125 = (2x+5)\left(4x^2 - 10x + 25\right).$$

3. $27m^3 + 64n^9 = (3m)^3 + \left(4n^3\right)^3$ Suma de cubos

$$= \left(3m + 4n^3\right)\left((3m)^2 - (3m)(4n^3) + (4n^3)^2\right)$$ Factorizamos la suma de cubos

$$= \left(3m + 4n^3\right)\left(9m^2 - 12mn^3 + 16n^6\right).$$

Luego,

$$27m^3 + 64n^9 = \left(3m + 4n^3\right)\left(9m^2 - 12mn^3 + 16n^6\right).$$

4. $\dfrac{x^6}{125} - \dfrac{y^3}{8} = \left(\dfrac{x^2}{5}\right)^3 - \left(\dfrac{y}{2}\right)^3$ Diferencia de cubos

$$= \left(\frac{x^2}{5} - \frac{y}{2}\right)\left(\left(\frac{x^2}{5}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{5}\right)\left(\frac{y}{2}\right) + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right)$$ Factorizamos la diferencia de cubos

$$= \left(\frac{x^2}{5} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x^4}{25} + \frac{x^2y}{10} + \frac{y^2}{4}\right).$$

Luego,

$$\frac{x^6}{125} - \frac{y^3}{8} = \left(\frac{x^2}{5} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x^4}{25} + \frac{x^2y}{10} + \frac{y^2}{4}\right).$$

Ejemplo 22.2

Factorizar:

1. $a^3 + 8b^{15}$.
2. $8m^3 - 27y^6$.
3. 1+1.000x^6.
4. $216a^{12} + 125b^9$.
5. $8(m-n)^3 - 125(m+n)^3$.

Solución

1. $a^3 + 8b^{15} = a^3 + (2b^5)^3$ Suma de cubos
   $= (a + 2b^5)(a^2 - 2ab^5 + 4b^{10})$ Factorizamos la suma de cubos.
2. $8m^3 - 27y^6 = (2m)^3 - (3y^2)^3$ Diferencia de cubos
   $= (2m - 3y^2)(4m^2 + 6my^2 + 9y^4)$ Factorizamos la diferencia de cubos.
3. $1 + 1.000x^6 = 1^3 + (10x^2)^3$ Suma de cubos
   $= (1 + 10x^2)(1 - 10x^2 + 100x^4)$ Factorizamos la suma de cubos.
4. $216a^{12} + 125b^9 = (6a^4)^3 + (5b^3)^3$ Suma de cubos
   $= (6a^4 + 5b^3)(36a^8 - 30a^4b^3 + 125b^6)$ Factorizamos la suma de cubos.

5. $8(m-n)^3 - 125(m+n)^3$

$$\begin{aligned}
&= [2(m-n)]^3 - [5(m+n)]^3 \\
&= [2(m-n) - 5(m+n)][4(m-n)^2 + 10(m-n)(m+n) + 25(m+n)^2] \\
&= (2m - 2n - 5m - 5n)[4(m-n)^2 + 10(m-n)(m+n) + 25(m+n)^2] \\
&= (-3m - 7n)(4m^2 - 8mn + 4n^2 + 10m^2 - 10n^2 + 25m^2 + 50mn + 25n^2) \\
&= (-3m - 7n)(39m^2 + 42mn + 19n^2).
\end{aligned}$$

Ejemplo 22.3

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 27a^3b^3$.
2. $64(x-2y)^3 - 216(x+2y)^3$.
3. $729z^{12} + 512w^3$.
4. $8x^6y^9z^{12} - 125m^3n^3p^6$.

Solución

1. $$\begin{aligned}
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 27a^3b^3 &= \left(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right) + 27a^3b^3 \\
&= (a+b)^3 + (3ab)^3 \\
&= (a + b + 3ab)[(a+b)^2 - 3ab(a+b) + (3ab)^2] \\
&= (a + 3ab + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3a^2b - 3ab^2 + 9a^2b^2).
\end{aligned}$$

2. $64(x-2y)^3 - 216(x+2y)^3 = [4(x-2y)]^3 - [6(x+2y)]^3$

$$\begin{aligned}
&= [4(x-2y) - 6(x+2y)][16(x-2y)^2 + 24(x-2y)(x+2y) + 36(x+2y)^2] \\
&= (4x - 8y - 6x - 12y)(16x^2 - 64xy + 64y^2 + 24x^2 - 96y^2 + 36x^2 + 144xy + 112y^2) \\
&= (-2x - 20y)(76x^2 + 80xy + 112y^2) \\
&= -8(x + 10y)(19x^2 + 20xy + 28y^2).
\end{aligned}$$

3. $729z^{12} + 512w^3 = (9z^4)^3 + (8w)^3$ es una suma de cubos y por tanto,

$$729z^{12} + 512w^3 = (9z^4 + 8w)(81z^8 - 72z^4w + 64w^2).$$

4. $8x^6y^9z^{12} - 125m^3n^3p^6 = (2x^2y^3z^4)^3 - (5mnp^2)^3$ es una diferencia de cubos y por tanto,

$$8x^6y^9z^{12} - 125m^3n^3p^6 = (2x^2y^3z^4 - 5mnp^2)(4x^4y^6z^8 + 10x^2y^3z^4mnp^2 + 25m^2n^2p^4).$$

Ejercicios propuestos

Factorizar:

1. $x^{12} + y^{12}$.
2. $343x^3 + 512y^6$.
3. $27a^9 - 64b^{15}$.
4. $(a+b)^3 - 8(a-b)^3$.
5. $343x^9 + 216y^6$.

Respuestas

1. $(x^4 + y^4)(x^8 - x^4y^4 + y^8)$.
2. $(7x + 8y^2)(49x^2 - 56xy^2 + 64y^4)$.
3. $(3a^3 - 4b^5)(9a^6 + 12a^3b^5 + 16b^{10})$.
4. $(-a + 3b)(7a^2 - 6ab + 3b^2)$.
5. $(7x^3 + 6y^2)(49x^6 - 42x^3y^2 + 36y^4)$.

Lección 23

Factorización
Ejercicios II

En esta lección vamos a presentar ejercicios sobre los temas de factorización vistos en las lecciones anteriores.

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $3x^3 - 15x^2 + 9x$.
2. $(4x)^2 - (3y + z)^2$.
3. $9x^2 - 30x + 25$.
4. $12d^2 - 31dh + 9h^2$.
5. $(a + b)(a - b) + (a + b)b$.
6. $27a^{15}b^{12} + 216$.
7. $x^{17} - x$.
8. $9u^4 + 15u^2v^2 + 16v^4$.
9. $16a^4 - 81b^4$.
10. $x^6 - y^6$.
11. $x^7 + x^4 - 16x^3 - 16$.
12. $16m^2 - 40mn + 25n^2$.
13. $y^4 + 7y^2 + 12$.
14. $s^2t^2 - 2st^3 - 63t^4$.
15. $64z^4 + w^4$.
16. $125x^3 - 525x^2y + 735xy^2 - 343y^3$.
17. $3x^2 - 31x + 56$.

Solución

1. El mayor factor común de los coeficientes 3, -15 y 9 es 3, y x es el único factor común literal. Tenemos así,

$$3x^3 - 15x^2 + 9x = 3x(x^2 - 5x + 3).$$

El polinomio entre paréntesis es de la forma $x^2 + bx + c$. Al tratar de factorizarlo vemos que no es posible hallar dos números enteros cuyo producto sea 3 y su suma -5. Luego, $x^2 - 5x + 3$ no es factorizable en los enteros.

2. $(4x)^2 - (3y + z)^2 = [4x + (3y + z)][4x - (3y + z)]$ Factorizamos la diferencia de cuadrados

$$= (4x + 3y + z)(4x - 3y - z).$$

3. Como $9x^2 = (3x)^2$, $25 = 5^2$ y $30x = 2(3x)(5)$ entonces $9x^2 - 30x + 25$ es un trinomio cuadrado perfecto y por tanto,

$$9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2.$$

4. $12d^2 - 31dh + 9h^2$ es un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, con $a = 12$, $b = -31h$ y $c = 9h^2$. Como 3 y 4 son dos números cuyo producto es 12, -9 y -1 son dos números cuyo producto es 9 y como $-31 = 3(-9) + 4(-1)$ entonces,

$$12d^2 - 31dh + 9h^2 = (3d - h)(4d - 9h).$$

5. El factor común de mayor grado es $a + b$. Por tanto,

$$(a + b)(a - b) + (a + b)b = (a + b)(a - b + b) = a(a + b).$$

6. $27a^{15}b^{12} + 216 = (3a^5b^4)^3 + 6^3$ es una suma de cubos y por tanto,

$$27a^{15}b^{12} + 216 = (3a^5b^4 + 6)(9a^{10}b^8 - 18a^5b^4 + 36).$$

7. $x^{17} - x = x(x^{16} - 1)$ Sacamos factor común x

$= x(x^8 + 1)(x^8 - 1)$ Factorizamos la diferencia de cuadrados

$= x(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^4 - 1)$ Factorizamos la diferencia de cuadrados

$= x(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)$ Factorizamos la diferencia de cuadrados

$= x(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ Factorizamos la diferencia de cuadrados.

8. Vemos que $9u^4+15u^2v^2+16v^4$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque $9u^4 = (3u^2)^2$, $16v^4 = (4v^2)^2$ y $2(3u^2)(4v^2) = 24u^2v^2 \neq 15u^2v^2$.

Una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es convertir el segundo término en $24u^2v^2$ y ello se logra sumándole $9u^2v^2$. Para que el trinomio dado no varíe debemos restar la misma cantidad $9u^2v^2$ que se va a sumar.

$$
\begin{aligned}
&9u^4 + 15u^2v^2 + 16v^4 \\
&\quad = 9u^4 + 15u^2v^2 + 16v^4 + 9u^2v^2 - 9u^2v^2 && \text{Sumamos y restamos } 9u^2v^2 \\
&\quad = (9u^4 + 15u^2v^2 + 16v^4 + 9u^2v^2) - 9u^2v^2 && \text{Agrupamos los primeros cuatro términos} \\
&\quad = (9u^4 + 24u^2v^2 + 16v^4) - 9u^2v^2 && \text{Reducimos términos semejantes} \\
&\quad = (3u^2 + 4v^2)^2 - 9u^2v^2 && \text{Factorizamos el trinomio.} \\
&\quad = [(3u^2 + 4v^2) + 3uv][(3u^2 + 4v^2) - 3uv] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&\quad = (3u^2 + 3uv + 4v^2)(3u^2 - 3uv + 4v^2) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } u.
\end{aligned}
$$

9. $16a^4 - 81b^4$

$$
\begin{aligned}
&= (4a^2)^2 - (9b^2)^2 && \text{Es una diferencia de cuadrados} \\
&= (4a^2 + 9b^2)(4a^2 - 9b^2) && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&= (4a^2 + 9b^2)[(2a)^2 - (3b)^2] && \text{El segundo factor es una diferencia de cuadrados} \\
&= (4a^2 + 9b^2)(2a + 3b)(2a - 3b) && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados.}
\end{aligned}
$$

10. Como 6 es divisible por 2 y por 3, este ejercicio se puede empezar a resolver como una diferencia de cuadrados o una diferencia de cubos. Si expresamos $x^6 = (x^3)^2$ y $y^6 = (y^3)^2$ tenemos que $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2$ es una diferencia de cuadrados. Si expresamos $x^6 = (x^2)^3$ y $y^6 = (y^2)^3$ tenemos que $x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3$ es una diferencia de cubos. Por cualesquiera de las dos formas de expresión, el resultado final debe ser igual. Vamos a trabajarlo como diferencia de cuadrados.

$$
\begin{aligned}
x^6 - y^6 &= (x^3)^2 - (y^3)^2 && \text{Diferencia de cuadrados} \\
&= (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2) && \text{Factorizamos suma y diferencia de cubos.}
\end{aligned}
$$

Hacer el ejercicio expresando el polinomio inicial como una diferencia de cubos.

11.
$$
\begin{aligned}
x^7 + x^4 - 16x^3 - 16 &= (x^7 + x^4) + (-16x^3 - 16) \\
&= x^4(x^3 + 1) - 16(x^3 + 1) \\
&= (x^3 + 1)(x^4 - 16) \\
&= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 4)(x^2 - 4) \\
&= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2).
\end{aligned}
$$

12. $16m^2 - 40mn + 25n^2$ es un trinomio cuadrado perfecto ya que $16m^2 = (4m)^2$, $25n^2 = (5n)^2$ y $40mn = 2(4m)(5n)$. Por tanto,
$$16m^2 - 40mn + 25n^2 = (4m - 5n)^2.$$

13. Como $y^4 + 7y^2 + 12 = (y^2)^2 + 7(y^2) + 12$ es un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ con y^2 en lugar de x, debemos hallar dos números cuyo producto sea 12 y su suma sea 7.

Estos números son 4 y 3. Luego,

$$y^4 + 7y^2 + 12 = (y^2 + 4)(y^2 + 3).$$

14. El factor común literal de mayor grado es t^2. Por tanto,

$$s^2t^2 - 2st^3 - 63t^4 = t^2(s^2 - 2st - 63t^2).$$

El polinomio entre paréntesis es de la forma $s^2 + bs + c$ con $b = -2t$ y $c = -63t^2$ y por tanto debemos encontrar dos números cuyo producto sea -63 y su suma -2; estos números son -9 y 7. Así, $s^2 - 2st - 63t^2 = (s - 9t)(s + 7t)$. Entonces,

$$s^2t^2 - 2st^3 - 63t^4 = t^2(s - 9t)(s + 7t).$$

15. Como $64z^4 + w^4 = (8z^2)^2 + (w^2)^2$ podemos completar un trinomio cuadrado perfecto si sumamos $2(8z^2)(w^2) = 16z^2w^2$. Para no alterar el polinomio restamos la misma cantidad así,

$$\begin{aligned}
64z^4 + w^4 &= 64z^4 + w^4 + 16z^2w^2 - 16z^2w^2 && \text{Sumamos y restamos } 16z^2w^2\\
&= (64z^4 + 16z^2w^2 + w^4) - 16z^2w^2 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros tres términos}\\
&= (8z^2 + w^2)^2 - 16z^2w^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= (8z^2 + w^2 + 4zw)(8z^2 + w^2 - 4zw) && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= (8z^2 + 4zw + w^2)(8z^2 - 4zw + w^2) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } z.
\end{aligned}$$

16. Veamos si este polinomio cumple las condiciones para ser el cubo de un binomio: tiene cuatro términos con signos alternadamente positivos y negativos, $125x^3$ es un cubo perfecto porque $125x^3 = (5x)^3$, $343y^3$ es un cubo perfecto porque $343y^3 = (7y)^3$, $3(5x)^2(7y) = 525x^2y$ es el segundo término y $3(5x)(7y)^2 = 735xy^2$ es el tercer término. Se cumplen las condiciones y por tanto,

$$125x^3 - 525x^2y + 735xy^2 - 343y^3 = (5x - 7y)^3.$$

17. $3x^2 - 31x + 56$ es un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a = 3$, $b = -31$ y $c = 56$. Como 3 y 1 son dos números cuyo producto es 3, -7 y -8 son dos números cuyo producto es 56 y $-31 = 3(-8) + 1(-7)$ entonces,

$$3x^2 - 31x + 56 = (3x - 7)(x - 8).$$

Ejercicios propuestos

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $8x^9 + 36x^6y^2 + 54x^3y^4 + 27y^6$.
2. $(a^4 + b^4)^2 - 4a^4b^4$.
3. $x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4$.

4. $m^9 + 27n^3$.
5. $15x^2 + 28x - 32$.
6. $x^3 + 7x^2 - 18x$.

Respuestas

1. $(2x^3 + 3y^2)^3$.
2. $(a^2 + b^2)^2(a + b)^2(a - b)^2$.
3. $(x^2 + 2xy + 3y^2)(x^2 - 2xy + 3y^2)$.
4. $(m^3 + 3n)(m^6 - 3m^3n + 9n^2)$.
5. $(5x - 4)(3x + 8)$.
6. $x(x + 9)(x - 2)$.

Lección 24

División sintética

En esta lección aprenderemos un método simplificado para realizar algunas divisiones.

La **Regla de Rufini**, más conocida como **División Sintética**, es una forma simplificada o abreviada del procedimiento para dividir polinomios, cuando el divisor es de la forma $x - a$, donde a es un número.

Vamos a explicar el procedimiento para realizar la división sintética mediante un ejemplo.

Consideremos la división
$$2x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x - 6 \div x - 3.$$

Realicemos primero la división en la forma usual (división larga):

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -x^3 & +2x^2 & +5x & -6 & x-3 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +6x^3 & & & & 2x^3+5x^2+17x+56 \\ \cline{1-5}
 & 5x^3 & +2x^2 & +5x & -6 & \\
 & -5x^3 & +15x^2 & & & \\ \cline{1-5}
 & & 17x^2 & +5x & -6 & \\
 & & -17x^2 & +51x & & \\ \cline{1-5}
 & & & 56x & -6 & \\
 & & & -56x & +168 & \\ \cline{1-5}
 & & & & 162 &
\end{array}$$

El cociente es $2x^3 + 5x^2 + 17x + 56$ y el residuo es 162.

A continuación explicamos paso a paso el procedimiento para hacer la división sintética con este ejemplo:

- Del dividendo sólo se escriben los coeficientes y en la casilla del divisor $x - a$ se escribe solamente el número a, que para el ejemplo es 3:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -1 & 2 & 5 & -6 & 3 \\ \cline{6-6}
\end{array}$$

- Se deja un espacio debajo del renglón anterior (para un segundo renglón) y se traza un segmento de recta horizontal. Se inicia el proceso de división bajando el primer coeficiente, 2, al tercer renglón ubicado debajo del segmento trazado (notemos que 2 es el primer coeficiente del cociente):

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -1 & 2 & 5 & -6 & \;3 \\ \cline{6-6}
 & & & & & \\ \hline
2 & & & & &
\end{array}$$

- El coeficiente bajado, 2, se multiplica por a, que en nuestro caso es 3, y el resultado, 6, se escribe en el segundo renglón debajo del segundo coeficiente del dividendo, que es -1. Se hace la suma $-1+6$ y el resultado, 5, se escribe en el tercer renglón:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -1 & 2 & 5 & -6 & \;3 \\ \cline{6-6}
 & 6 & & & & \\ \hline
2 & 5 & & & &
\end{array}$$

- Se repite con 5 lo que acabamos de hacer con el primer coeficiente 2, es decir, se multiplica 5 por a (que es 3), se coloca el resultado, 15, en el segundo renglón debajo del tercer coeficiente y se suma verticalmente:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -1 & 2 & 5 & -6 & \;3 \\ \cline{6-6}
 & 6 & 15 & & & \\ \hline
2 & 5 & 17 & & &
\end{array}$$

- Se continúa este proceso de multiplicar y sumar hasta que se use el último coeficiente:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -1 & 2 & 5 & -6 & \;3 \\ \cline{6-6}
 & 6 & 15 & 51 & 168 & \\ \hline
2 & 5 & 17 & 56 & 162 &
\end{array}$$

- El resultado se lee en el tercer renglón así: Los números de izquierda a derecha, sin incluir el último, son los coeficientes del cociente, correspondientes a potencias decrecientes de x, teniendo presente que el grado del cociente es una unidad menor que el grado del dividendo. El último número de dicho renglón es el residuo.

  Como el grado del divisor es 4, el del cociente es 3, es decir, el cociente es $2x^3+5x^2+17x+56$. El residuo es 162.

Observación:

Al escribir los coeficientes del dividendo debemos tener cuidado que él esté ordenado en potencias decrecientes de la variable. Si faltan algunas de estas potencias, por cada una que falte se coloca 0 como coeficiente en el lugar correspondiente.

Ejemplo 24.1

Usando división sintética, dividir $2x^4+3x^3-x^2-1$ entre $x-2$.

Solución

Como en el dividendo falta el término en x escribimos 0 como coeficiente en el lugar correspondiente al coeficiente de x.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & 3 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ \cline{6-6} & 4 & 14 & 26 & 52 & \\ \hline 2 & 7 & 13 & 26 & 51 & \end{array}$$

Del tercer renglón vemos que el cociente es $2x^3 + 7x^2 + 13x + 26$ y el residuo es 51, es decir,

$$\frac{2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1}{x - 2} = 2x^3 + 7x^2 + 13x + 26 + \frac{51}{x - 2}.$$

Ejemplo 24.2

Hallar, usando división sintética, el cociente y el residuo de dividir $x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ entre:

1. $x - 3$.
2. $x + 2$.

Solución

1. $$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -4 & -7 & 10 & 3 \\ \cline{5-5} & 3 & -3 & -30 & \\ \hline 1 & -1 & -10 & -20 & \end{array}$$

   Luego, el cociente es $x^2 - x - 10$ y el residuo es -20.

2. Como $x + 2 = x - (-2)$, en este caso el valor de a es -2.

   $$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -4 & -7 & 10 & -2 \\ \cline{5-5} & -2 & 12 & -10 & \\ \hline 1 & -6 & 5 & 0 & \end{array}$$

   Luego, el cociente es $x^2 - 6x + 5$ y el residuo es 0.

   Como la división es exacta, el dividendo es el producto de dos factores: el cociente y el divisor. Así,

   $$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = \left(x^2 - 6x + 5\right)(x + 2).$$

Ejemplo 24.3

Determinar, usando división sintética, si $x + 1$ y $x - 2$ son factores del polinomio $2x^3 - 5x^2 + x + 2$.

Solución

Como en el ejemplo anterior, el divisor es factor del dividendo si la división es exacta.

1. Realicemos la división sintética de $2x^3 - 5x^2 + x + 2$ entre $x + 1$, teniendo en cuenta que como $x + 1 = x - (-1)$, en la casilla del divisor escribimos -1.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -5 & 1 & 2 & -1 \\ \cline{5-5} & -2 & 7 & -8 & \\ \hline 2 & -7 & 8 & -6 & \end{array}$$

Como el residuo es -6, la división no es exacta y entonces $x + 1$ no es factor de $2x^3 - 5x^2 + x + 2$.

2. Realicemos la división sintética de $2x^3 - 5x^2 + x + 2$ entre $x - 2$:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -5 & 1 & 2 & 2 \\ \cline{5-5} & 4 & -2 & -2 & \\ \hline 2 & -1 & -1 & 0 & \end{array}$$

Como el residuo es 0, la división es exacta y entonces $x-2$ es factor de $2x^3-5x^2+x+2$. Luego,

$$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = \left(2x^2 - x - 1\right)(x - 2).$$

Ejemplo 24.4

Usando división sintética, hallar el cociente y el residuo de dividir:

1. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 12x + 9$ entre $x + 3$.
2. $n^4 - 27n^2 - 14n + 120$ entre $n + 1$.
3. $a^5 - 23a^3 - 6a^2 + 112a + 96$ entre $a - 3$.

Solución

1.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 4 & 6 & 12 & 9 & -3 \\ \cline{6-6} & -3 & -3 & -9 & -9 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & \end{array}$$

Luego, el cociente es $x^3 + x^2 + 3x + 3$ y el residuo es 0. Podemos escribir el dividendo como el producto de dos factores así:

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 12x + 9 = \left(x^3 + x^2 + 3x + 3\right)(x + 3).$$

2. Como en el dividendo no aparece término en n^3, en el lugar donde debería estar el coeficiente de n^3 escribimos 0. Así,

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & -27 & -14 & 120 & -1 \\ \cline{6-6} & -1 & 1 & 26 & -12 & \\ \hline 1 & -1 & -26 & 12 & 108 & \end{array}$$

Luego, el cociente es $n^3 - n^2 - 26n + 12$ y el residuo es 108.

3. Escribimos 0 en el lugar donde debería aparecer el coeficiente de a^4. Así:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & 0 & -23 & -6 & 112 & 96 & \underline{3} \\ & 3 & 9 & -42 & -144 & -96 & \\ \hline 1 & 3 & -14 & -48 & -32 & 0 & \end{array}$$

   Luego, el cociente es $a^4 + 3a^3 - 14a^2 - 48a - 32$ y el residuo es 0. Podemos escribir el dividendo como el producto de dos factores así:

$$a^5 - 23a^3 - 6a^2 + 112a + 96 = \left(a^4 + 3a^3 - 14a^2 - 48a - 32\right)(a - 3).$$

Ejercicios propuestos

Usando división sintética, hallar el cociente y el residuo de dividir:

1. $a^2 - 5a + 1$ entre $a + 2$.
2. $x^3 - 2x^2 + x - 2$ entre $x - 2$.
3. $x^5 + x^4 - 12x^3 - x^2 - 4x - 2$ entre $x + 4$.
4. $a^5 - 3a^3 + 4a - 6$ entre $a - 2$.
5. $x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 3x^3 - x^2 + 2$ entre $x + 3$.

Respuestas

1. Cociente $a - 7$ y residuo 15.
2. Cociente $x^2 + 1$ y residuo 0.
3. Cociente $x^4 - 3x^3 - x$ y residuo -2.
4. Cociente $a^4 + 2a^3 + a^2 + 2a + 8$ y residuo 10.
5. Cociente $x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 69x^2 + 206x - 618$ y residuo 1.856.

Lección 25

Teorema del residuo

En esta lección veremos cómo hallar el residuo de una división cuando el divisor es un polinomio de la forma $x - a$, con a un número, sin necesidad de recurrir a la división larga o a la división sintética.

Empecemos, por ejemplo, dividiendo $x^5 - 2x^3 + x^2 - 5$ entre $x - 2$:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -5 & \underline{\;2\;} \\ & 2 & 4 & 4 & 10 & 20 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 5 & 10 & 15 & \end{array}$$

El cociente de la división es $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 5x + 10$ y el residuo es 15.

¿Qué valor se obtiene si en el dividendo reemplazamos x por 2?

Veamos:

$$(2)^5 - 2\,(2)^3 + (2)^2 - 5 = 32 - 16 + 4 - 5 = 15,$$

que según el resultado de la división es el residuo.

Este resultado, que se cumple siempre, se conoce como **Teorema del Residuo**, cuyo enunciado es:

El residuo de dividir un polinomio en x entre $x - a$ se obtiene reemplazando en el polinomio la variable x por a.

Nótese que aplicando este teorema podemos hallar el residuo sin efectuar la división.

Ejemplo 25.1

Usando el teorema del residuo, hallar el residuo de dividir:

1. $z^4 - 2z^3 + 4z$ entre $z - 3$.
2. $-2w^3 - w + \dfrac{3}{4}$ entre $w - \dfrac{1}{2}$.

Solución

1. Aplicando el teorema del residuo, obtenemos el residuo de la división reemplazando z por 3 en el dividendo, así,

$$(3)^4 - 2(3)^3 + 4\,(3) = 81 - 54 + 12 = 39.$$

Luego, el residuo de dividir $z^4 - 2z^3 + 4z$ entre $z - 3$ es 39.

Comprobamos este resultado usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -2 & 0 & 4 & 0 & \underline{3} \\ & 3 & 3 & 9 & 39 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 13 & 39 & \end{array}$$

En efecto, el residuo es 39.

2. Aplicamos el teorema del residuo, reemplazando w por $\dfrac{1}{2}$ en el dividendo, así,

$$-2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 0.$$

Luego, el residuo de dividir $-2w^3 - w + \dfrac{3}{4}$ entre $w - \dfrac{1}{2}$ es 0.

Comprobamos este resultado usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} -2 & 0 & -1 & 3/4 & \underline{1/2} \\ & -1 & -1/2 & -3/4 & \\ \hline -2 & -1 & -3/2 & 0 & \end{array}$$

En efecto, el residuo de la división es 0.

Ejemplo 25.2

Empleando el teorema del residuo, hallar el residuo de dividir:

1. $2x^3 - 6x^2 + x - 5$ entre $x - 2$.
2. $x^3 + 2x^2 - x - 2$ entre $x + 1$.

Solución

1. El residuo de la división se obtiene reemplazando x por 2 en el dividendo. Así, el residuo es:

$$2(2)^3 - 6(2)^2 + 2 - 5 = 2(8) - 6(4) - 3 = 16 - 24 - 3 = -11.$$

Comprobamos este resultado usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -6 & 1 & -5 & \underline{2} \\ & +4 & -4 & -6 & \\ \hline 2 & -2 & -3 & -11 & \end{array}$$

En efecto, el residuo es -11.

2. El teorema del residuo se aplica cuando el divisor es de la forma $x - a$, por lo que en este caso debemos escribir $x + 1$ como $x - (-1)$. Por tanto, para calcular el residuo reemplazamos x por -1 en el dividendo, así:

$$(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2 = -1 + 2 + 1 - 2 = 0.$$

Entonces, el residuo de dividir $x^3 + 2x^2 - x - 2$ entre $x + 1$ es 0. Comprobémoslo utilizando división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & -2 & -1 \\ \cline{5-5} & -1 & -1 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

En efecto, el residuo de la división es 0.

Observación: Como la división es exacta,

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = \left(x^2 + x - 2\right)(x + 1).$$

Vemos que $x + 1$ es factor de $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Ejemplo 25.3

Emplear el teorema del residuo para determinar si $x - 1$ es un factor del polinomio

$$x^3 + 2x^2 - x - 2.$$

Solución

$x - 1$ es un factor del polinomio $x^3 + 2x^2 - x - 2$ si la división $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x - 1}$ es exacta, es decir, si el residuo de esta división es 0.

Aplicando el teorema del residuo, tenemos que dicho residuo es el resultado de reemplazar x por 1 en el dividendo:

$$(1)^3 + 2(1)^2 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0.$$

Como se obtuvo residuo 0, entonces $x - 1$ sí es un factor de $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Ejemplo 25.4

Hallar el residuo en las siguientes divisiones y comprobar el resultado usando división sintética:

1. $\dfrac{x^3 - 6x^2 - x + 30}{x - 3}$.
2. $\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x + 2}$.

Solución

1. El residuo es $(3)^3 - 6(3)^2 - 3 + 30 = 27 - 54 - 3 + 30 = 0$. Comprobemos el resultado usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & -1 & 30 & 3 \\ \cline{5-5} & 3 & -9 & -30 & \\ \hline 1 & -3 & -10 & 0 & \end{array}$$

En efecto, el residuo es 0.

2. El residuo es $(-2)^2 - 3(-2) - 10 = 4 + 6 - 10 = 0$. Comprobemos el resultado usando división sintética:

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -3 & -10 & \underline{-2} \\ & -2 & 10 & \\ \hline 1 & -5 & 0 & \end{array}$$

En efecto, el residuo es 0.

Nota: De la división sintética en 1. tenemos,

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = \left(x^2 - 3x - 10\right)(x - 3)\,. \tag{25.1}$$

De la división sintética en 2. tenemos,

$$x^2 - 3x - 10 = (x + 5)(x + 2)\,. \tag{25.2}$$

Como el cociente en (25.1) es el dividendo en (25.2), reemplazamos (25.2) en (25.1) y obtenemos:

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 - x + 30 &= \left(x^2 - 3x - 10\right)(x - 3) \\ &= (x + 5)(x + 2)(x - 3)\,. \end{aligned}$$

Observamos en este ejemplo que, en ambos casos, obtuvimos residuo 0 y factorizamos el polinomio $x^3 - 6x^2 - x + 30$ usando el teorema del residuo y división sintética.

Ejercicios propuestos

I. Utilizando el teorema del residuo, hallar el residuo de las siguientes divisiones:

1. $\dfrac{z^3 - 2z^2 + z - 1}{z + 3}$.
2. $\dfrac{x^5 - 4x^3 + 3x + 2}{x - 1}$.
3. $\dfrac{\frac{1}{2}w^4 - \frac{3}{2}w^2 + w}{w + 1}$.
4. $\dfrac{y^3 + \frac{1}{3}y - 5}{y + 2}$.

II. Determinar, usando el teorema del residuo si,

1. $x + 2$ es factor de $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x + 10$.
2. $z - 1$ es factor de $z^3 - 5z + 1$.
3. $w + 3$ es factor de $w^2 + 4w + 3$.
4. x es factor de $x^2 + 3x$.

Respuestas

I. 1. -49.

2. 2.

3. -2.

4. $-\dfrac{41}{3}$.

II. 1. Si.

2. No.

3. Si.

4. Si.

Lección 26

Teorema del factor

En esta lección veremos otra forma de factorizar algunos polinomios.

Consideremos la división de un polinomio en la variable x entre $x-a$, con a un número.

Según el teorema del residuo, si sustituimos x por a en dicho polinomio, obtenemos el residuo de la división.

También sabemos que:

Si el residuo de la división es 0, entonces $x-a$ es un factor del polinomio.

Combinando los dos resultados anteriores obtenemos el **Teorema del Factor**, que se enuncia así:

Si al sustituir x por a en un polinomio en x, se obtiene 0, entonces $x-a$ es un factor del polinomio.

También es cierto el siguiente resultado:

Si al sustituir x por a en un polinomio en x, el resultado es diferente de 0, entonces $x-a$ no es un factor del polinomio.

Ejemplo 26.1

Utilizar el teorema del factor para determinar cuáles de los siguientes binomios son factores del polinomio $x^4+x^3-5x^2+x-6$:

1. $x-2$.
2. $x+1$.
3. $x+3$.

Solución

1. Sustituimos x por 2 en el polinomio, así,

$$2^4+2^3-5(2)^2+2-6=16+8-20+2-6=0.$$

Luego, según el teorema del factor, $x-2$ es un factor del polinomio.

2. Como $x+1=x-(-1)$, sustituimos x por -1 en el polinomio, así,

$$(-1)^4+(-1)^3-5(-1)^2+(-1)-6=1-1-5-1-6=-12.$$

Como $-12\neq 0$ entonces $x+1$ no es factor del polinomio.

3. Como $x+3=x-(-3)$, sustituimos x por -3 en el polinomio, así,

$$(-3)^4+(-3)^3-5(-3)^2+(-3)-6=81-27-45-3-6=0.$$

Luego, $x+3$ es factor del polinomio.

Nota: Como $x-2$ y $x+3$ son factores del polinomio, podemos afirmar que

$$x^4+x^3-5x^2+x-6=(x-2)(x+3)q$$

donde q es un cierto polinomio. ¿Cómo hallar q?

$$q=\frac{x^4+x^3-5x^2+x-6}{(x-2)\,(x+3)}=\frac{x^4+x^3-5x^2+x-6}{x^2+x-6}.$$

Si realizamos esta división obtenemos que,

$$q=x^2+1,$$

y así tenemos la factorización del polinomio:

$$x^4+x^3-5x^2+x-6=(x-2)(x+3)(x^2+1).$$

Vamos a aplicar el teorema del factor para factorizar algunos polinomios. Para ello necesitamos números tales que al sustituir la variable por ellos en el polinomio a factorizar, obtengamos 0. Esto se logra usando el siguiente resultado:

> En un polinomio en una variable con coeficientes enteros y con 1 como coeficiente del término de mayor grado, **solamente** los factores del término independiente pueden ser los números que al reemplazar la variable por ellos, den como resultado 0.

Se llama **término independiente** en un polinomio en una variable, al término que no tiene la variable. Así, en el polinomio x^3+2x^2-x-2, el término independiente es -2.

Para factorizar un polinomio como el descrito en el resultado anterior, utilizando el teorema del factor, hacemos lo siguiente:

a) Encontramos los factores del término independiente.

b) Reemplazamos en el polinomio la variable x por un factor a del término independiente. Si el resultado es diferente de 0, entonces $x-a$ no es un factor del polinomio.

c) Continuamos con los siguientes factores del término independiente hasta encontrar uno para el cual el resultado sea 0. Si b es ese factor, entonces $x-b$ es un factor del polinomio.

d) Dividimos el polinomio entre $x - b$ utilizando división sintética.

e) Escribimos el polinomio como el producto de $x - b$ por el polinomio cociente obtenido en d).

f) Repetimos los pasos anteriores con el polinomio cociente para ver si es posible factorizarlo por este método.

g) Terminamos el proceso cuando el polinomio cociente obtenido en d) sea de grado 1 o ninguno de los factores de su término independiente lo haga 0.

Ejemplo 26.2

Factorizar, usando el teorema del factor, el polinomio

$$z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6.$$

Solución

El coeficiente del término de mayor grado es 1 y el término independiente es -6.

Los factores del término independiente -6 son: ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.

Reemplazamos en el polinomio la variable z por cada factor del término independiente hasta obtener uno para el cual el resultado sea cero:

Si $z = 1$, $(1)^4 - 2\,(1)^3 - (1)^2 - 4\,(1) - 6 = -12 \neq 0$, entonces $z - 1$ no es factor de $z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6$.

Si $z = -1$, $(-1)^4 - 2\,(-1)^3 - (-1)^2 - 4\,(-1) - 6 = 0$, luego $z - (-1) = z + 1$ es factor de $z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6$.

Dividimos $z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6$ entre $z + 1$, usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -2 & -1 & -4 & -6 & \underline{-1} \\ & -1 & 3 & -2 & 6 & \\ \hline 1 & -3 & 2 & -6 & 0 & \end{array}$$

Luego,

$$z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6 = \left(z^3 - 3z^2 + 2z - 6\right)(z + 1)\,. \tag{26.1}$$

Repitamos el proceso anterior con el cociente $z^3 - 3z^2 + 2z - 6$.

Los factores del término independiente -6 son: ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.

1 no hace 0 a $z^3 - 3z^2 + 2z - 6$, ya que no hace 0 a $z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6$.

Reemplazamos los otros factores de -6 en $z^3 - 3z^2 + 2z - 6$ hasta obtener uno que lo haga 0:

Si $z = -1$, $(-1)^3 - 3\,(-1)^2 + 2\,(-1) - 6 = -12 \neq 0$, entonces $z + 1$ no es factor de $z^3 - 3z^2 + 2z - 6$.

Si $z = 2$, tenemos $(2)^3 - 3\,(2)^2 + 2\,(2) - 6 = -6 \neq 0$, luego, $z - 2$ no es factor.

Si $z=-2$, tenemos $(-2)^3-3(-2)^2+2(-2)-6=-30\neq 0$, luego, $z+2$ no es factor.

Si $z=3$, tenemos $(3)^3-3(3)^2+2(3)-6=0$, luego, $z-3$ es factor de z^3-3z^2+2z-6.

Dividimos z^3-3z^2+2z-6 entre $z-3$, así,

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & 2 & -6 & 3 \\ \cline{5-5} & 3 & 0 & 6 & \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & \end{array}$$

Entonces,

$$z^3-3z^2+2z-6=\left(z^2+2\right)(z-3). \qquad (26.2)$$

El término independiente del nuevo cociente z^2+2 es 2, y los factores de 2 son ± 1 y ± 2. Como ninguno de éstos hace 0 a z^2+2, entonces z^2+2 no es factorizable en los enteros.

Reemplazando (26.2) en (26.1) obtenemos la siguiente factorización del polinomio en el conjunto de los números enteros:

$$z^4-2z^3-z^2-4z-6=\left(z^3-3z^2+2z-6\right)(z+1)=\left(z^2+2\right)(z-3)(z+1).$$

Nota: Como $z^2+2\neq 0$ para cualquier valor de z en los reales entonces, z^2+2 no es factorizable en los reales.

Ejercicios propuestos

Usar el teorema del factor para factorizar los siguientes polinomios:

1. x^3-4x^2+x+6.
2. $m^3-12m+16$.
3. $a^4-15a^2-10a+24$.
4. $z^5-25z^3+z^2-25$.

Respuestas

1. $(x+1)(x-2)(x-3)$.
2. $(m-2)^2(m+4)$.
3. $(a-1)(a+2)(a+3)(a-4)$.
4. $(z+1)(z-5)(z+5)(z^2-z+1)$.

Lección 27

Factorización
Ejercicios III

En esta lección veremos cómo la división sintética, el teorema del residuo y el teorema del factor nos proporcionan herrramientas para factorizar polinomios, en particular los de grado tres o más, que no haya sido posible factorizarlos por los métodos ya vistos.

En el proceso de factorización de un polinomio en x, usando estos conceptos, es fácil determinar si $x - a$, con a un número entero, es o no factor del polinomio en x.

Una vez hallado un primer factor $x-a$ del polinomio en x, la división sintética nos proporciona un método abreviado para dividir el polinomio en x entre $x-a$ y el polinomio obtenido como cociente es el segundo factor del polinomio dado. Con este segundo factor repetimos el proceso anterior, esto es, determinamos, usando el teorema del factor, si este polinomio cociente tiene factores de la forma $x - b$, con b entero, y en caso afirmativo, realizamos la división para obtener un nuevo polinomio cociente que constituye el tercer factor del polinomio dado. De nuevo repetimos este proceso con el tercer factor obtenido para ver si es posible factorizarlo por este método. El proceso de factorización concluye cuando el polinomio cociente obtenido sea de primer grado o ninguno de los factores de su término independiente lo anule.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 27.1

Factorizar el polinomio $x^3 - 39x + 70$.

Solución

Recordemos que en un polinomio con coeficientes enteros y con 1 como coeficiente del término de mayor grado, sus posibles factores de la forma $x - a$ pueden ser solamente aquellos para los cuales a es un factor del término independiente.

Los factores del término independiente, 70, son: ± 1, ± 2, ± 5, ± 7 y ± 70.

Reemplazamos en el polinomio dado la variable x por cada factor del término independiente hasta obtener uno para el cual el resultado sea cero:

- Si $x = 1$, $1^3 - 39(1) + 70 = 32 \neq 0$, entonces $x - 1$ no es factor de $x^3 - 39x + 70$.
- Si $x = -1$, $(-1)^3 - 39(-1) + 70 = 108 \neq 0$, entonces $x - (-1) = x + 1$ no es factor de $x^3 - 39x + 70$.
- Si $x = 2$, $2^3 - 39(2) + 70 = 0$, entonces $x - 2$ es factor de $x^3 - 39x + 70$.

Dividimos $x^3 - 39x + 70$ entre $x - 2$, usando división sintética, para hallar el segundo factor:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -39 & 70 & \underline{2} \\ & 2 & 4 & -70 & \\ \hline 1 & 2 & -35 & 0 & \end{array}$$

Luego,

$$x^3 - 39x + 70 = \left(x^2 + 2x - 35\right)(x - 2).$$

Podemos repetir el proceso anterior con el cociente $x^2 + 2x - 35$. Pero observemos que éste es un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y 7 y -5 son dos números cuyo producto es -35 y su suma es 2. Así, $x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$ y por lo tanto,

$$x^3 - 39x + 70 = (x - 2)(x + 7)(x - 5).$$

Ejemplo 27.2

Factorizar el polinomio $x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4$.

Solución

$x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4$ es un polinomio de grado 4 con el coeficiente del término de mayor grado igual a 1 y cuyo término independiente es -4.

Los factores del término independiente son ± 1, ± 2 y ± 4.

Reemplazamos en el polinomio dado la variable x por cada factor del término independiente hasta obtener uno para el cual el resultado sea cero:

- Si $x = 1$, $1^4 + 1^3 - 2(1)^2 - 6(1) - 4 = -10 \neq 0$, entonces $x - 1$ no es factor de $x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4$.
- Si $x = -1$, $(-1)^4 + (-1)^3 - 2(-1)^2 - 6(-1) - 4 = 0$, entonces $x - (-1) = x + 1$ es factor de $x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4$.

Dividimos $x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4$ entre $x + 1$, usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 1 & -2 & -6 & -4 & \underline{-1} \\ & -1 & 0 & 2 & 4 & \\ \hline 1 & 0 & -2 & -4 & 0 & \end{array}$$

Luego,

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4 = \left(x^3 - 2x - 4\right)(x + 1).$$

Repetimos el proceso anterior con el polinomio $x^3 - 2x - 4$:

Los factores del término independiente -4 son ± 1, ± 2 y ± 4.

Reemplazamos en $x^3 - 2x - 4$ la variable x por cada factor del término independiente hasta obtener uno para el cual el resultado sea cero:

- Como 1 no hace 0 al polinomio inicial $x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4$ tampoco hace 0 a $x^3 - 2x - 4$.

- Si $x = -1$, $(-1)^3 - 2(-1) - 4 = -3 \neq 0$, entonces $x - (-1) = x + 1$ no es factor de $x^3 - 2x - 4$.
- Si $x = 2$, $2^3 - 2(2) - 4 = 0$, entonces $x - 2$ es factor de $x^3 - 2x - 4$.

Dividimos $x^3 - 2x - 4$ entre $x - 2$, usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ & 2 & 4 & 4 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

Luego, $x^3 - 2x - 4 = (x^2 + 2x + 2)(x - 2)$.

Repetimos nuevamente el proceso anterior con el polinomio $x^2 + 2x + 2$:

Los factores del término independiente 2 son ± 1, ± 2. Reemplacemos x por cada uno de estos factores hasta obtener uno para el cual el resultado sea cero:

- Como todos los términos del trinomio $x^2 + 2x + 2$ tienen signo $+$, descartamos los factores positivos de 2.
- Si $x = -1$, $(-1)^2 + 2(-1) + 2 = 1 \neq 0$, entonces $x - (-1) = x + 1$ no es factor de $x^2 + 2x + 2$.
- Si $x = -2$, $(-2)^2 + 2(-2) + 2 = 2 \neq 0$, entonces $x - (-2) = x + 2$ no es factor de $x^2 + 2x + 2$.

Luego, no hay un polinomio de la forma $x - a$, con a entero, que sea un factor de $x^2 + 2x + 2$. Esto es, $x^2 + 2x + 2$ no es factorizable en los enteros. Más adelante mostraremos que tampoco lo es en los reales. Luego, $x^2 + 2x + 2$ es un polinomio primo en los enteros y también en los reales.

Observemos además que si intentamos factorizar $x^2 + 2x + 2$ como un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, no es posible hallar dos números cuyo producto sea 2 y su suma 2.

Por lo tanto, la factorización en los enteros obtenida para el polinomio dado es:

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4 = (x + 1)(x - 2)\left(x^2 + 2x + 2\right).$$

Ejemplo 27.3

Factorizar $y^5 - 2y^2 - 9y - 6$.

Solución

$y^5 - 2y^2 - 9y - 6$ es un polinomio de grado 5 con el coeficiente del término de mayor grado igual a 1 y cuyo término independiente es -6.

Los factores del término independiente -6 son ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.

Reemplazamos los factores de -6 en $y^5 - 2y^2 - 9y - 6$ hasta obtener uno que lo haga cero:

- Si $y = 1$, $1^5 - 2(1)^2 - 9(1) - 6 = -16 \neq 0$, entonces $y - 1$ no es factor de $y^5 - 2y^2 - 9y - 6$.

- Si $y=-1$, $(-1)^5-2(-1)^2-9(-1)-6=0$, entonces $y-(-1)=y+1$ es factor de y^5-2y^2-9y-6.

Dividimos y^5-2y^2-9y-6 entre $y+1$, usando división sintética, para hallar el segundo factor:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & 0 & 0 & -2 & -9 & -6 & \underline{-1} \\ & -1 & 1 & -1 & 3 & 6 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & -3 & -6 & 0 & \end{array}$$

Luego,

$$y^5-2y^2-9y-6=\left(y^4-y^3+y^2-3y-6\right)(y+1).$$

Repetimos el proceso anterior con el polinomio cociente $y^4-y^3+y^2-3y-6$:

Los factores del término independiente -6 son ±1, ±2, ±3 y ±6.

Reemplazamos los factores de -6 en $y^4-y^3+y^2-3y-6$ hasta obtener uno que lo haga cero:

- Como 1 no hace 0 al polinomio inicial y^5-2y^2-9y-6 tampoco hace 0 a $y^4-y^3+y^2-3y-6$.
- Si $y=-1$, $(-1)^4-(-1)^3+(-1)^2-3(-1)-6=0$, entonces $y-(-1)=y+1$ es factor de $y^4-y^3+y^2-3y-6$.

Dividimos $y^4-y^3+y^2-3y-6$ entre $y+1$, usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -1 & 1 & -3 & -6 & \underline{-1} \\ & -1 & 2 & -3 & 6 & \\ \hline 1 & -2 & 3 & -6 & 0 & \end{array}$$

Luego, $y^4-y^3+y^2-3y-6=(y^3-2y^2+3y-6)(y+1)$.

Repetimos de nuevo el proceso para factorizar a y^3-2y^2+3y-6. Pero, si observamos este polinomio vemos que agrupando los dos primeros términos y los dos últimos se obtiene un factor común $y-2$, así,

$$y^3-2y^2+3y-6=\left(y^3-2y^2\right)+(3y-6)=y^2(y-2)+3(y-2)=(y-2)\left(y^2+3\right).$$

Como $y^2+3\neq0$ para cualquier valor de y en los reales, porque y^2+3 es siempre un número positivo, entonces y^2+3 no es factorizable en los reales.

Luego, la factorización en los enteros del polinomio y^5-2y^2-9y-6 es:

$$y^5-2y^2-9y-6=(y+1)(y+1)(y-2)\left(y^2+3\right)=(y+1)^2(y-2)\left(y^2+3\right).$$

Ejercicios propuestos

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$.
2. $x^3 - 2x - 4$.
3. $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16$.
4. $x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36$.

Respuestas

1. $(x-1)(x-2)(x+5)$.
2. $(x-2)\left(x^2+2x+2\right)$.
3. $(x-2)^2(x^2+4)$.
4. $(x-2)^2(x-3)(x+3)$.

Lección 28

Ecuaciones

En esta lección estudiaremos los conceptos de ecuación, identidad y soluciones de una ecuación. Además aprenderemos el procedimiento para encontrar las soluciones de una ecuación.

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas con una o varias letras, en la que al sustituir las letras por números **no siempre** se obtiene un enunciado verdadero. Las letras se llaman **variables** o **incógnitas** de la ecuación.

Una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que hay letras y al sustituir las letras por números se obtiene **siempre** un enunciado verdadero se llama una **identidad**.

Las expresiones separadas por el signo de igualdad, ya sea en una ecuación o en una identidad, se llaman **miembros**; el que está a la izquierda del signo de igualdad se llama **primer miembro** y el que está a la derecha **segundo miembro.**

Ejemplo 28.1

1. La igualdad $4x + 2 = 3x - 1$ es una ecuación porque en ella aparece una letra, x, y además al sustituir, por ejemplo, x por 1 se obtiene $6 = 2$ que es un enunciado falso. Observemos que al sustituir, por ejemplo, x por -3 se obtiene $-10 = -10$ que es un enunciado verdadero.

   El primer miembro de la ecuación es $4x + 2$ y el segundo es $3x - 1$.

2. En forma similar, la igualdad $x^2 + 3y = x - y + 4$ es una ecuación con primer miembro $x^2 + 3y$ y segundo $x - y + 4$. Observemos que al sustituir x por 1 y y por 2 se obtiene el enunciado falso $7 = 3$, mientras que al reemplazar x por 0 y y por 1 se obtiene el enunciado verdadero $3 = 3$.

3. La igualdad $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ es una identidad porque al sustituir x por cualquier número se obtiene un enunciado verdadero. En general, los productos notables que hemos visto son identidades.

En esta lección y en las siguientes centraremos la atención en ecuaciones con una sola variable y tales que cada uno de sus miembros es un polinomio en esa variable. Ecuaciones de este tipo se llaman **ecuaciones polinómicas en una variable**.

El **grado** de una ecuación polinómica en una variable, es el mayor exponente que tiene la variable en la ecuación.

Ejemplo 28.2

1. $4x + 2 = 3x - 1$ es una ecuación polinómica en la variable x de grado 1 o de primer grado.
2. $7y^4 - 5y^2 - 2 = 0$ es una ecuación polinómica en la variable y, de grado 4.
3. $z - 5z^3 = -2$ es una ecuación polinómica en la variable z, de grado 3.

Dada una ecuación en una variable x, si al sustituir x por un número se obtiene un enunciado verdadero, se dice que el número es una **solución** o **raíz de la ecuación**. También diremos que dicho número **verifica** o **satisface** la ecuación.

Ejemplo 28.3

1. En la ecuación $x + 5 = 0$ si sustituimos x por -5 obtenemos $-5 + 5 = 0$ ó $0 = 0$ que es un enunciado verdadero. Luego, -5 es una solución o raíz de la ecuación.

   Si en la misma ecuación reemplazamos x por 2 obtenemos $2 + 5 = 0$ ó $7 = 0$ que es un enunciado falso. Luego, 2 no es una solución de la ecuación.

   Observemos que -5 es el único número que satisface la ecuación. Si asignamos cualquier otro valor a la variable x obtenemos un enunciado falso. Esto es, la única solución de la ecuación $x + 5 = 0$ es $x = -5$.

2. En la ecuación $x^2 - 2 = x$ si sutituimos x por -1 obtenemos $(-1)^2 - 2 = -1$ ó $-1 = -1$ que es un enunciado verdadero. Luego, $x = -1$ es una solución de la ecuación.

   Si en la misma ecuación sustituimos x por 1 obtenemos $1^2 - 2 = 1$ ó $-1 = 1$ que es un enunciado falso. Luego, $x = 1$ no es solución de la ecuación.

   ¿Existirán más valores de x que satisfagan esta ecuación?

3. La ecuación $x + 5 = x - 2$ no tiene solución en el conjunto de los números reales, es decir, ningún número real la satisface. De manera similar, la ecuación $x^2 + 3 = 0$ no tienen solución en el conjunto de los números reales.

¿Cómo encontrar las soluciones de una ecuación?

Resolver una ecuación es hallar todas sus soluciones. Dos ecuaciones que tienen las mismas soluciones se dicen **equivalentes**.

El procedimiento para resolver una ecuación consiste en producir, a partir de ella, una serie de ecuaciones equivalentes más simples hasta obtener una que se pueda resolver fácilmente. Para esto usamos las siguientes propiedades:

a) Si sumamos o restamos un mismo término a ambos miembros de una ecuación, la igualdad no se altera.

b) Si multiplicamos o dividimos ambos miembros de una ecuación por un mismo número, diferente de cero, la igualdad se conserva.

Ejemplo 28.4

Resolver la ecuación $6x - 7 = 2x + 1$.

Solución

$$\begin{aligned}
6x - 7 &= 2x + 1 \\
6x - 7 + 7 &= 2x + 1 + 7 && \text{Sumamos 7 a cada miembro} \\
6x &= 2x + 8 && \text{Reducimos términos semejantes} \\
6x - 2x &= 2x + 8 - 2x && \text{Restamos } 2x \text{ a cada miembro} \\
4x &= 8 && \text{Reducimos términos semejantes} \\
\frac{4x}{4} &= \frac{8}{4} && \text{Dividimos ambos miembros entre 4} \\
x &= 2.
\end{aligned}$$

Esta última ecuación y todas las obtenidas en este procedimiento son ecuaciones equivalentes a la ecuación dada. Luego, $x = 2$ es la única solución de la ecuación original.

En la práctica sumar o restar un mismo término a ambos miembros de una ecuación equivale a trasladar el término de un miembro al otro cambiándole el signo. Este procedimiento se llama **trasposición de términos**.

Ejemplo 28.5

Resolver la ecuación $2x + 3 = x$.

Solución

$$\begin{aligned}
2x + 3 &= x \\
2x - x &= -3 && \text{Trasponemos términos} \\
x &= -3 && \text{Reducimos términos semejantes.}
\end{aligned}$$

La única solución de la ecuación es $x = -3$.

Ejemplo 28.6

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $5x = 8x - 15$.
2. $7x + 2 = 2(3x - 1) + x$.
3. $2y - 8 = 4(y - 2) - 2y$.

Solución

1. $5x = 8x - 15$

$$\begin{aligned} 15 &= 8x - 5x && \text{Trasponemos términos} \\ 15 &= 3x && \text{Reducimos términos semejantes} \\ \frac{15}{3} &= \frac{3x}{3} && \text{Dividimos ambos miembros entre 3} \\ 5 &= x && \text{Simplificamos.} \end{aligned}$$

   Luego, $x = 5$ es la única solución de la ecuación.

2. $$\begin{aligned} 7x + 2 &= 2(3x - 1) + x \\ 7x + 2 &= 6x - 2 + x && \text{Realizamos operaciones} \\ 7x - 6x - x &= -2 - 2 && \text{Trasponemos términos} \\ 0x &= -4 && \text{Reducimos términos semejantes.} \end{aligned}$$

   Luego, la ecuación dada no tiene solución, porque no hay ningún número real que al sustituirlo por x en la ecuación $0x = -4$ de un enunciado verdadero.

3. $2y - 8 = 4(y - 2) - 2y$

$$\begin{aligned} 2y - 8 &= 4y - 8 - 2y && \text{Realizamos operaciones} \\ 2y - 8 &= 2y - 8 && \text{Reducimos términos semejantes} \\ 2y - 2y &= 8 - 8 && \text{Trasponemos términos} \\ 0y &= 0 && \text{Reducimos términos semejantes.} \end{aligned}$$

   Al reemplazar y por cualquier número real en la ecuación $0y = 0$ obtenemos un enunciado verdadero, esto es, cualquier valor de y en los reales satisface la ecuación original. Por tanto, la ecuación $2y - 8 = 4(y - 2) - 2y$ es una identidad.

Ejercicios propuestos

I. Verificar que:

1. $z = -\frac{7}{2}$ es solución de la ecuación $2z - 5 = 4z + 2$.
2. $w = 5$ es solución de la ecuación $-3w = -(w + 5) - w$.
3. $x = \frac{7}{4}$ es solución de la ecuación $x + 4 - 3x = -3 + 2x$.
4. $y = -\frac{8}{5}$ es solución de la ecuación $y - 3 - 2y = 4y + 5$.
5. $z = -2$ es solución de la ecuación $2z + 3z - 5z - 2 = 3z + 4$.

II. Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $x + 2x - 3 = 0$.
2. $2y + 5 = -1 - y$.
3. $w - 2 + 4w = 3$.
4. $5x = 3\,(x + 2) + 2x$.

Solución

II. 1. $x = 1$.
2. $y = -2$.
3. $w = 1$.
4. No tiene solución.

Lección 29

Ecuaciones lineales o de primer grado en una variable

En esta lección aprenderemos cómo resolver una ecuación de primer grado en una variable y a verificar que el valor hallado es efectivamente la solución de la ecuación.

Una **ecuación de primer grado** o **lineal** en una variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax + b = 0, \text{ con } a \text{ y } b \text{ números fijos ó constantes, } a \neq 0.$$

Si en la ecuación $ax + b = 0$ restamos b en ambos miembros obtenemos,

$$\begin{aligned} ax + b - b &= 0 - b \\ ax &= -b. \end{aligned}$$

Dividiendo ambos lados entre a obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{ax}{a} &= \frac{-b}{a} \\ x &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Así, si $a \neq 0$, la ecuación $ax + b = 0$ tiene exactamente una solución $x = -b/a$.

Para resolver una ecuación de primer grado en una variable, podemos proceder así:

a) Efectuamos las operaciones necesarias para reunir en un miembro todos los términos que contienen la variable y en el otro miembro todos los términos constantes, es decir, los términos que no tienen la variable.

b) Reducimos términos semejantes.

c) Despejamos la variable dividiendo ambos miembros de la ecuación entre el coeficiente de la variable.

Es conveniente comprobar que la solución hallada efectivamente satisface la ecuación, es decir, verificar que se obtiene un enunciado verdadero al reemplazar el valor obtenido en la ecuación original.

Ejemplo 29.1

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $8z - 4 + 3z = 7z + z + 14.$

2. $8x - 15x - 30x - 51x = 53x + 31x - 172.$

3. $(5 - 3y) - (-4y + 6) = (8y + 11) - (3y - 6).$

4. $-\{3x + 8 - [-15 + 6x - (-3x + 2) - (5x + 4)] - 29\} = -5.$

Solución

1. $8z - 4 + 3z = 7z + z + 14$

$$\begin{aligned} 11z - 4 &= 8z + 14 && \text{Reducimos términos semejantes en cada miembro} \\ 11z - 8z &= 14 + 4 && \text{Trasponemos términos} \\ 3z &= 18 && \text{Reducimos términos semejantes} \\ \frac{3z}{3} &= \frac{18}{3} && \text{Despejamos } z\text{, dividiendo ambos miembros entre 3} \\ z &= 6 && \text{Simplificamos.} \end{aligned}$$

Por tanto, $z = 6$ es la única solución de la ecuación original.

Verifiquemos que el valor encontrado satisface la ecuación sustituyendo z por 6 en la ecuación original: $8(6) - 4 + 3(6) = 7(6) + 6 + 14$. Realizamos las operaciones y obtenemos $62 = 62$.

2. $8x - 15x - 30x - 51x = 53x + 31x - 172$

$$\begin{aligned} -88x &= 84x - 172 && \text{Reducimos términos semejantes} \\ -88x - 84x &= -172 && \text{Trasponemos términos} \\ -172x &= -172 && \text{Reducimos términos semejantes} \\ x &= \frac{-172}{-172} && \text{Dividimos entre } -172 \text{ en ambos miembros} \\ x &= 1 && \text{Simplificamos.} \end{aligned}$$

Luego, $x = 1$ es la solución de la ecuación original.

Verifiquemos que $x = 1$ satisface la ecuación, reemplazando x por 1 en la ecuación original: $8(1) - 15(1) - 30(1) - 51(1) = 53(1) + 31(1) - 172$. Realizamos las operaciones y obtenemos $-88 = -88$.

3. $(5-3y)-(-4y+6)=(8y+11)-(3y-6)$

$$\begin{aligned} 5-3y+4y-6 &= 8y+11-3y+6 && \text{Eliminamos símbolos de agrupación}\\ y-1 &= 5y+17 && \text{Reducimos términos semejantes}\\ -4y &= 18 && \text{Trasponemos términos}\\ \frac{-4y}{-4} &= \frac{18}{-4} && \text{Dividimos entre -4 en ambos miembros}\\ y &= -\frac{9}{2} && \text{Simplificamos.} \end{aligned}$$

Luego, $y=-\dfrac{9}{2}$ es la única solución de la ecuación original.

Verifiquemos que el valor encontrado satisface la ecuación original:

$$\left[5-3\left(-\frac{9}{2}\right)\right]-\left[-4\left(-\frac{9}{2}\right)+6\right]=\left[8\left(-\frac{9}{2}\right)+11\right]-\left[3\left(-\frac{9}{2}\right)-6\right].$$

Realizamos las operaciones y obtenemos $-\dfrac{11}{2}=-\dfrac{11}{2}$.

4. $-\{3x+8-[-15+6x-(-3x+2)-(5x+4)]-29\}=-5$

$$\begin{aligned} -3x-8+[-15+6x-(-3x+2)-(5x+4)]+29 &= -5 && \text{Eliminamos símbolos de agrupación}\\ -3x-8-15+6x+3x-2-5x-4+29 &= -5 && \text{Eliminamos símbolos de agrupación}\\ x &= -5 && \text{Reducimos términos semejantes.} \end{aligned}$$

Luego, $x=-5$ es la solución de la ecuación original.

Verifiquemos que $x=-5$ satisface la ecuación, reemplazando x por -5 en la ecuación original: $-\{3(-5)+8-[-15+6(-5)-(-3(-5)+2)-(5(-5)+4)]-29\}=-5$.

Realizamos las operaciones y obtenemos $-5=-5$.

Ejemplo 29.2

En cada una de las siguientes ecuaciones, encontrar el valor de la variable que la satisface:

1. $2(3x+3)-4(5x-3)=x(x-3)-x(x+5)$.
2. $9w-(5w+1)-\{2+8w-(7w-5)\}+9w=0$.
3. $7x-(2x+1)=-(-5x)+(-2x-1)$.
4. $(3y-1)^2-5(y-2)-(2y+3)^2-(5y+2)(y-1)=0$.

Solución

1. $2(3x+3)-4(5x-3)=x(x-3)-x(x+5)$

$$\begin{aligned}
6x+6-20x+12 &= x^2-3x-x^2-5x && \text{Realizamos operaciones}\\
-14x+18 &= -8x && \text{Reducimos términos semejantes}\\
18 &= 14x-8x && \text{Trasponemos términos}\\
18 &= 6x && \text{Reducimos términos semejantes}\\
\frac{18}{6} &= \frac{6x}{6} && \text{Dividimos entre 6 en ambos miembros}\\
3 &= x && \text{Simplificamos.}
\end{aligned}$$

Luego, $x=3$ es la solución de la ecuación original.

Verifiquemos que $x=3$ satisface la ecuación, reemplazando x por 3 en la ecuación original: $2[3(3)+3]-4[5(3)-3]=3(3-3)-3(3+5)$. Realizando las operaciones obtenemos $-24=-24$.

2. $9w-(5w+1)-\{2+8w-(7w-5)\}+9w=0$

$$\begin{aligned}
9w-5w-1-2-8w+7w-5+9w &= 0 && \text{Eliminamos símbolos de agrupación}\\
12w-8 &= 0 && \text{Reducimos términos semejantes}\\
4(3w-2) &= 0 && \text{Sacamos factor común 4}\\
3w-2 &= 0 && \text{Porque } 4 \neq 0\\
3w &= 2 && \text{Trasponemos términos}\\
w &= \frac{2}{3} && \text{Dividimos entre 3 en ambos miembros.}
\end{aligned}$$

Luego, la solución de la ecuación original es $w=\dfrac{2}{3}$.

Verifiquemos que $w=\dfrac{2}{3}$ satisface la ecuación, sustituyendo w por $\dfrac{2}{3}$ en la ecuación original:

$$9\left(\frac{2}{3}\right)-\left(5\left(\frac{2}{3}\right)+1\right)-\left\{2+8\left(\frac{2}{3}\right)-\left(7\left(\frac{2}{3}\right)-5\right)\right\}+9\left(\frac{2}{3}\right)=0.$$

Realizando las operaciones obtenemos $0=0$.

3. $7x-(2x+1)=-(-5x)+(-2x-1)$

$$\begin{aligned} 7x-2x-1&=5x-2x-1 && \text{Eliminamos símbolos de agrupación}\\ 5x-1&=3x-1 && \text{Reducimos términos semejantes}\\ 5x-3x&=0 && \text{Trasponemos términos}\\ 2x&=0 && \text{Reducimos términos semejantes}\\ x&=0 && \text{Porque } 2\neq 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $x=0$ es la solución de la ecuación original.

Si reemplazamos x por 0 en la ecuación original tenemos

$7(0)-(2(0)+1)=--5(0)+[-(-2(0)-1)]$. Al realizar las operaciones obtenemos $-1=-1$.

4. $$(3y-1)^2-5(y-2)-(2y+3)^2-(5y+2)(y-1)=0$$

$$\begin{aligned} 9y^2-6y+1-5y+10-4y^2-12y-9-5y^2+3y+2&=0 && \text{Realizamos operaciones}\\ -20y+4&=0 && \text{Reducimos términos semejantes}\\ -4(5y-1)&=0 && \text{Sacamos factor común } -4\\ 5y-1&=0 && \text{Porque } -4\neq 0\\ 5y&=1 && \text{Trasponemos términos}\\ y&=\frac{1}{5} && \text{Dividimos ambos miembros entre 5.} \end{aligned}$$

Luego, $y=\dfrac{1}{5}$ es solución de la ecuación.

Verifiquemos que $y=\dfrac{1}{5}$ es la solución reemplazando este valor en la ecuación original:

$$\left[3\left(\frac{1}{5}\right)-1\right]^2-5\left(\frac{1}{5}-2\right)-\left[2\left(\frac{1}{5}\right)+3\right]^2-\left[5\left(\frac{1}{5}\right)+2\right]\left(\frac{1}{5}-1\right)=0.$$

Después de realizar las operaciones obtenemos $0=0$.

Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $5(z-1)+16(2z+3)=3(2z-7)-z$.
2. $(4-5x)(4x-5)=(10x-3)(7-2x)$.
3. $(y-2)^2-(3-y)^2=1$.
4. $(x+1)^3-(x-1)^3=6x(x-3)$.
5. $-3(2w+7)+(-5w+6)-8(1-2w)-(w-3)=0$.

Respuestas

1. $z = -2$.
2. $x = \dfrac{1}{35}$.
3. $y = 3$.
4. $x = -\dfrac{1}{9}$.
5. $w = 5$.

Lección 30

Solución de problemas con ecuaciones de primer grado en una variable I

En esta lección vamos a resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado en una variable.

En matemáticas como en otras ciencias y en situaciones de la vida real, encontramos problemas que involucran dos o más cantidades relacionadas entre sí. Una gran variedad de ellos cuando se plantean matemáticamente conducen a ecuaciones las cuales hay que resolver.

En esta clase tratamos únicamente problemas que conducen a una sola ecuación de primer grado en una variable. Plantear la ecuación es algo que se adquiere con la práctica y siguiendo algunas pautas que se dan a continuación:

1. Leemos cuidadosamente el problema hasta entender claramente la situación que se plantea.
2. Identificamos las cantidades comprendidas en el problema, tanto las conocidas como las desconocidas.
3. Elegimos una de las cantidades desconocidas y la representamos mediante una variable, generalmente x, y después expresamos las otras cantidades desconocidas en términos de dicha variable.
4. Relacionamos estas cantidades mediante una ecuación.

Problema 30.1

La edad de Pedro es el triple de la de Juan y las dos edades suman 40 años. Hallar ambas edades.

Solución

Sea x la edad de Juan. Como la edad de Pedro es el triple de la edad de Juan, entonces la edad de Pedro es $3x$.

Ahora, como la suma de ambas edades es 40, entonces

$$x + 3x = 40.$$

Resolviendo la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} 4x &= 40 \\ x &= 10. \end{aligned}$$

Entonces la edad de Juan es 10 y la edad de Pedro, que es tres veces la de Juan, es 30.

Es fácil verificar que la solución satisface las condiciones del problema: La edad de Pedro, 30, es el triple de la de Juan, 10, y las dos suman 40.

Problema 30.2

En un hotel de dos pisos hay 48 habitaciones. Si el número de habitaciones del segundo piso es la mitad de las del primero, ¿cuántas habitaciones hay en cada piso?

Solución

Sea x el número de habitaciones del segundo piso. Entonces las del primer piso son $2x$.

Como el total de habitaciones es 48, se tiene

$$x + 2x = 48.$$

Resolvamos esta ecuación para hallar x :

Reduciendo términos semejantes tenemos $3x = 48$, luego $x = 16$.

Por tanto, en el segundo piso hay 16 habitaciones y en el primero, que tiene el doble, hay 32, para un total de 48.

Problema 30.3

La suma de dos números es 100 y el doble del mayor equivale al triple del menor. Hallar los números.

Solución

Sea x el número menor. Entonces $100 - x$ es el número mayor, ya que los dos suman 100.

El hecho de que el doble del mayor sea el triple del menor, lo expresamos mediante la ecuación

$$2\,(100 - x) = 3x.$$

Resolvamos la ecuación para hallar x :

$$\begin{aligned} 200 - 2x &= 3x \\ 200 &= 3x + 2x \\ 200 &= 5x \\ 40 &= x. \end{aligned}$$

Entonces el número menor es 40 y el mayor 60, números que satisfacen las condiciones del problema.

Problema 30.4

La edad actual de A es el doble de la edad actual de B y hace 10 años la edad de A era el triple de la de B. Hallar las edades actuales.

Solución

Sea x la edad actual de B. Como la de A es el doble de la de B, entonces la edad actual de A es $2x$.

Hace 10 años la edad de B era $x - 10$ y la edad de A era $2x - 10$.

El hecho de que hace 10 años la edad de A era el triple de la de B lo expresamos mediante la ecuación

$$2x - 10 = 3\,(x - 10)\,,$$

que resolvemos así:

$$\begin{aligned} 2x - 10 &= 3x - 30 \\ -10 + 30 &= 3x - 2x \\ 20 &= x. \end{aligned}$$

Luego, la edad actual de B es 20 años y la de A es 40 años.

Verificar que los valores hallados satisfacen las condiciones del problema.

Problema 30.5

En un corral hay conejos y gallinas. El número total de animales es 30 y el de patas 100. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en el corral?

Solución

Sea x el número de conejos. Como el total de animales es 30, entonces $30 - x$ es el número de gallinas.

Consideremos ahora el número de patas: como cada conejo tiene 4 patas, los x conejos tienen $4x$ patas, y como cada gallina tiene 2 patas, entre todas tienen $2\,(30 - x)$ patas.

Con estos datos podemos plantear la ecuación en términos del número de patas así:

$$4x + 2\,(30 - x) = 100.$$

Resolviendo esta ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} 4x + 60 - 2x &= 100 \\ 2x &= 100 - 60 \\ 2x &= 40 \\ x &= 20. \end{aligned}$$

Luego, en el corral hay 20 conejos y 10 gallinas para un total de 30 animales y 100 patas.

Problema 30.6

Luis compró un vestido, un bastón y un sombrero por 25.900 pesos. El vestido costó 8 veces lo que el sombrero y el bastón 3.000 pesos menos que el vestido. Hallar los respectivos precios.

Solución

Sea x el precio del sombrero. Como el vestido costó 8 veces el precio del sombrero, entonces su precio es $8x$ y como el bastón costó 3.000 pesos menos que el vestido, su precio es $8x - 3.000$.

Como el precio total de las compras fue 25.900 pesos, podemos plantear la ecuación así:

$$x + 8x + 8x - 3.000 = 25.900$$

Resolviendo esta ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} 17x - 3.000 &= 25.900 \\ 17x &= 25.900 + 3.000 \\ 17x &= 28.900 \\ x &= 1.700. \end{aligned}$$

Por tanto, el sombrero costó 1.700 pesos, el vestido costó 13.600 pesos y el bastón costó 10.600 pesos para un total de 25.900 pesos.

Problema 30.7

Una sala rectangular tiene el doble de largo que de ancho. Si el largo se disminuye en 6 metros y el ancho se aumenta en 4 metros, la superficie de la sala no varía. Hallar las dimensiones de la sala.

Solución

Sea x el ancho de la sala, por tanto el largo es $2x$. Con esta dimensiones el área de la sala es $x(2x) = 2x^2$.

Si el largo se disminuye en 6 metros el nuevo largo es $2x - 6$ y si el ancho se aumenta en 4 metros, el nuevo ancho es $x + 4$. Con estas dimensiones el área es $(2x - 6)(x + 4)$.

Como el área de la sala no varía al cambiar sus dimensiones, podemos plantear la ecuación

$$2x^2 = (2x - 6)(x + 4).$$

Resolviendo esta ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 2x^2 + 2x - 24 \\ 2x^2 - 2x^2 - 2x &= -24 \\ -2x &= -24x \\ x &= 12. \end{aligned}$$

Las dimensiones de la sala son: largo 24 metros y ancho 12 metros.

Es fácil verificar que estos valores satisfacen las condiciones del problema: el área inicial es $(24)(12) = 288$ metros cuadrados y al cambiar las dimensiones el área no varía: $(18)(16) = 288$ metros cuadrados.

Problemas propuestos

1. Si un número se multiplica por 8 el resultado es el número aumentado en 21. ¿Cuál es el número?
2. Hace 14 años la edad de un padre era el triple de la edad de su hijo y ahora es el doble. ¿Qué edad tenían hace 14 años?
3. El largo de un buque que es 461 pies, excede en 11 pies a 9 veces el ancho. ¿Cuál es el ancho del buque?

Respuestas

1. 3.
2. La edad del hijo es 14 años y la del padre es 42 años.
3. 50 pies.

Lección 31

Solución de problemas con ecuaciones de primer grado en una variable II

En esta lección continuaremos resolviendo problemas que involucran ecuaciones de primer grado en una variable.

Problema 31.1

Tres números enteros consecutivos suman 204. ¿Cuáles son los números?

Solución

Sea x el primer número. Como los números son enteros consecutivos entonces $x+1$ es el segundo número y $x+2$ el tercero. Como su suma es 204,

$$x + (x+1) + (x+2) = 204.$$

Resolviendo esta ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} 3x + 3 &= 204[t] \\ 3x &= 201 \\ x &= 67. \end{aligned}$$

Luego, los números son $67, 68$ y 69 que son enteros consecutivos y su suma es 204.

Problema 31.2

Repartir 30.000 pesos entre A, B y C de modo que la parte de B sea el doble de la de A y la de C el triple de la de A.

Solución

Sea x la cantidad de dinero que le corresponde a A. La que corresponde a B que es el doble de la de A, es $2x$, y la de C, que es el triple de la de A, es $3x$.

Como la cantidad a repartir es 30.000 pesos tenemos:

$$\begin{array}{rcl} x + 2x + 3x & = & 30.000 \\ 6x & = & 30.000 \\ x & = & 5.000. \end{array}$$

Le corresponden 5.000 pesos a A, 10.000 pesos a B y 15.000 pesos a C, para un total de 30.000 pesos.

Problema 31.3

Cuando se pregunta a Lucas por su edad, responde: Si al doble de mi edad se le quitan 17 años tendría lo que me falta para tener 100 años. ¿Qué edad tiene Lucas?

Solución

Como no conocemos la edad de Lucas, la llamamos x.

Como el doble de su edad es $2x$ y para cumplir 100 años le faltan $100-x$ años, entonces:

$$\begin{aligned} 2x - 17 &= 100 - x \\ 2x + x &= 100 + 17 \\ 3x &= 117 \\ x &= 39. \end{aligned}$$

La edad de Lucas es 39 años.

Problema 31.4

Una persona tiene 14.000 pesos en dos bolsas. Si de la bolsa que tiene más dinero saca 2.000 pesos y los pone en la otra bolsa, ambas tendrían igual cantidad de dinero. ¿Cuánto dinero tiene en cada bolsa?

Solución

Si x es la cantidad de dinero en la bolsa que contiene más, entonces la bolsa con menos dinero tiene $14.000 - x$ pesos, y así:

$$\begin{aligned} x - 2.000 &= (14.000 - x) + 2.000 \\ x + x &= 14.000 + 2.000 + 2.000 \\ 2x &= 18.000 \\ x &= 9.000. \end{aligned}$$

La bolsa con más dinero tiene 9.000 pesos y la de menos tiene 5.000 pesos, para un total de 14.000 pesos.

Problema 31.5

Un muchacho compró el triple de lápices que de cuadernos, cada lápiz le costó 5.000 pesos y cada cuaderno 6.000 pesos. ¿Cuántos lápices y cuadernos compró, si por todo pagó 147.000 pesos?

Solución

Como no conocemos la cantidad de lápices ni de cuadernos, llamemos x al número de cuadernos. Entonces $3x$ será el número de lápices.

Como cada lápiz costó 5.000 pesos, los $3x$ lápices costaron $5.000\,(3x)$ pesos y los x cuadernos costaron $6.000x$ pesos, ya que cada uno valió 6.000 pesos. Como el valor de las compras fue de 147.000 pesos, entonces:

$$\begin{aligned}
5.000\,(3x) + 6.000x &= 147.000\\
1.000x\,(15+6) &= 147.000\\
21x &= 147\\
x &= 7.
\end{aligned}$$

El muchacho compró 7 cuadernos y 21 lápices.

Problema 31.6

El martes gané el doble de lo que gané el lunes, el miércoles el doble de lo que gané el martes, el jueves el doble de lo que gané el miércoles, el viernes 30.000 pesos menos que el jueves y el sábado 10.000 pesos más que el viernes. ¿Cuánto gané cada día, si en los seis días gané 911.000 pesos?

Solución

Sea x la cantidad que gané el lunes. Entonces, según el enunciado, el martes gané $2x$, el miércoles $4x$, el jueves $8x$, el viernes $8x - 30.000$ y el sábado $(8x - 30.000) + 10.000$.

Como en total gané 911.000 pesos, entonces,

$$\begin{aligned}
x + 2x + 4x + 8x + (8x - 30.000) + [(8x - 30.000) + 10.000] &= 911.000\\
31x - 50.000 &= 911.000\\
31x &= 961.000\\
x &= 31.000.
\end{aligned}$$

El lunes gané 31.000 pesos, el martes 62.000 pesos, el miércoles 124.000 pesos, el jueves 248.000 pesos, el viernes 218.000 pesos y el sábado 228.000.

Problema 31.7

Un hombre deja una herencia de 16.500.000 de pesos para repartir entre tres hijos y dos hijas, y decide que cada hija reciba 2.000.000 de pesos más que cada hijo. ¿Cuánto recibe cada uno?

Solución

Sea x la cantidad de dinero que recibe cada hijo. Entonces $x + 2.000.000$ de pesos es la herencia de cada hija.

A los tres hijos les toca un total de $3x$ pesos y a las dos hijas un total de $2\,(x + 2.000.000)$ de pesos en la repartición de los 16.500.000 de pesos y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
3x + 2\,(x + 2.000.000) &= 16.500.000\\
5x + 4.000.000 &= 16.500.000\\
5x &= 12.500.000\\
x &= 2.500.000.
\end{aligned}$$

A cada hijo le tocan 2.500.000 de pesos y a cada hija 4.500.000 de pesos.

Problemas propuestos

1. El mayor de dos números es 6 veces el menor y ambos números suman 147. Hallar los números.
2. Seis personas iban a comprar una casa contribuyendo por partes iguales, pero dos de ellas desistieron del negocio y entonces cada una de las restantes tuvo que poner 20.000.000 de pesos más. ¿Cuál es el valor de la casa?
3. Tenía cierta suma de dinero. Ahorré una suma igual a la que tenía y gasté 50.000 pesos; luego ahorré una suma igual al doble de lo que me quedaba y gasté 390.000 pesos. Si ahora no tengo nada, ¿cuánto tenía al principio?

Respuestas

1. 126 , 21.
2. 240.000.000 de pesos.
3. 90.000 pesos.

Lección 32

Plano cartesiano

En esta lección aprenderemos el concepto de par ordenado, describiremos el sistema coordenado rectangular o cartesiano y veremos cómo hallar las coordenadas de un punto en el plano cartesiano y cómo representar un par ordenado de números reales en dicho plano.

Par ordenado

Un **par ordenado** de números reales es una pareja de números reales en la cual es importante el orden en el que se escriben, es decir, se distingue el "*primer elemento*" y el "*segundo elemento*".

Si a y b son números reales, el par ordenado cuyo primer elemento es a y cuyo segundo elemento es b se denota (a, b).

Ejemplo 32.1

1. $(3, 5)$ es el par ordenado cuyo primer elemento es 3 y cuyo segundo elemento es 5.
2. $(0, -1)$ es el par ordenado cuyo primer elemento es 0 y cuyo segundo elemento es -1.
3. Si r representa un número real, $(r, 2\pi r)$ es un par ordenado cuyo primer elemento es r y cuyo segundo elemento es $2\pi r$.

Dos pares ordenados son **iguales** si y sólo si sus primeros elementos son iguales entre sí y sus segundos elementos son iguales entre sí. Es decir, si a, b, c y d son números reales,

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d.$$

Ejemplo 32.2

1. $(a, b) = (2, 7)$ si y sólo sí $a = 2$ y $b = 7$.
2. $(2, 1) \neq (1, 2)$ porque aunque los dos pares tiene los mismos elementos, no están en el mismo orden.
3. $(m, n) = (2, n)$ si y sólo si $m = 2$.

Asi como ubicamos los números reales en la recta numérica, ubicaremos los pares ordenados de números reales en el plano cartesiano, que describimos a continuación.

Plano cartesiano

En la lección 1 vimos que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ puede representarse geométricamente por los puntos de una línea recta llamada **recta real** o **recta numérica**, que por conveniencia escogimos horizontal.

A cada punto sobre la recta le corresponde un número real y a cada número real le corresponde un punto sobre la recta.

Si A es un punto sobre la recta numérica, al número real correspondiente al punto A se le llama ***coordenada*** del punto A.

Así, por ejemplo, vemos en la recta numérica de la figura que la coordenada del punto A es 1, la coordenada de B es $-\frac{1}{2}$, la coordenada de C es 5 y la coordenada de O es 0.

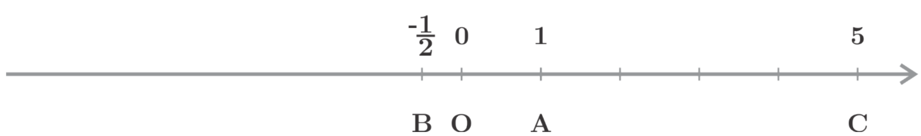

Figura 32.1

Al punto O cuya coordenada es 0 se le llama ***origen de coordenadas***.

Consideremos ahora dos rectas numéricas en un plano, una horizontal que llamaremos **eje *x*** y otra vertical que llamaremos **eje *y***, que se cortan perpendicularmente en el origen de coordenadas O, como se muestra en la figura.

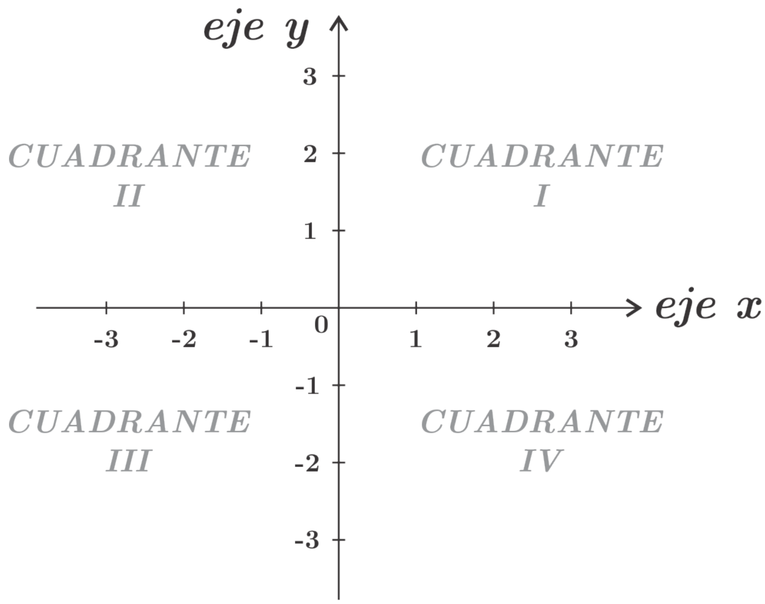

Figura 32.2

El sistema asi descrito se llama ***sistema coordenado rectangular o cartesiano***. Los ejes x y y se llaman ***ejes coordenados*** y el plano determinado por ellos se llama **plano *xy*** o

Plano cartesiano[1].

Los ejes coordenados dividen al plano xy en cuatro regiones llamadas ***cuadrantes*** numerados I, II, III y IV, en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Por conveniencia ubicamos los números positivos en el eje x a la derecha del O y los números negativos a la izquierda del O y en el eje y los números positivos arriba del O y los números negativos abajo del O.

¿Cómo hallar las coordenadas de un punto P ubicado en el plano?

A cada punto P del plano xy le podemos asignar un par ordenado de números reales. Para ello trazamos por P una recta vertical que corta al eje x en un punto cuya coordenada llamaremos a, y una recta horizontal que corta al eje y en un punto cuya coordenada llamaremos b. Entonces al punto P le asignamos el **par ordenado $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$**.

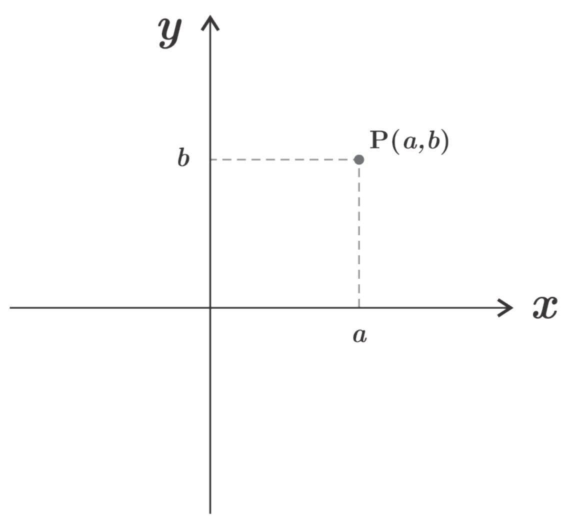

Figura 32.3

Se dice que (a, b) son las ***coordenadas de P***. a se llama ***coordenada x*** o ***abscisa*** de P y b se llama ***coordenada y*** u ***ordenada*** de P.

Las coordenadas del origen de coordenadas O son $(0, 0)$. Los puntos sobre el eje x tienen ordenada 0 y los que están sobre el eje y tienen abscisa 0.

Ejemplo 32.3

Determinar las coordenadas de los puntos P, Q y R que aparecen en la figura

[1]En honor al matemático y filósofo francés René Descartes, quien lo inventó

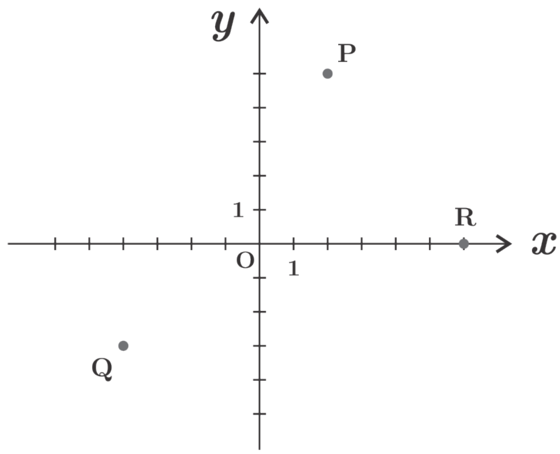

Figura 32.4

Solución

La recta vertical trazada por P corta al eje x en el punto de coordenada 2 y la recta horizontal trazada por P corta al eje y en el punto de coordenada 5. Luego, las coordenadas de P son $(2, 5)$.

La recta vertical trazada por Q corta al eje x en el punto de coordenada -4, que es la abscisa de Q, y la recta horizontal trazada por Q corta al eje y en el punto de coordenada -3, que es la ordenada de Q. Luego, las coordenadas de Q son $(-4, -3)$.

Las coordenadas de R son $(6, 0)$. ¿Por qué?

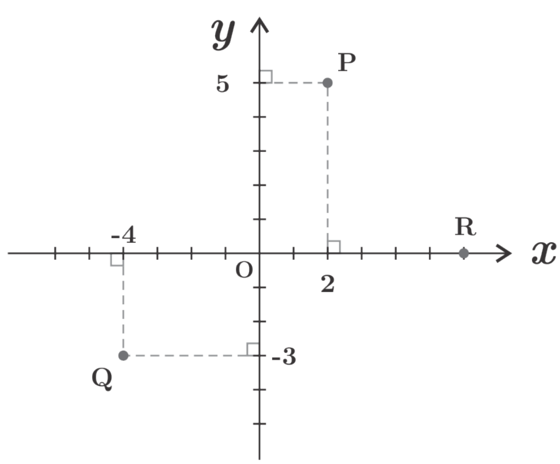

Figura 32.5

¿Cómo representar en el plano cartesiano un par ordenado (a, b)?

A todo par ordenado (a, b) de números reales le podemos asignar un punto P en el plano xy. Para localizarlo, ubicamos el punto de coordenada a en el eje x y el correspondiente a la coordenada b, en el eje y. Por a trazamos una recta vertical y por b una recta horizontal. El punto donde se cortan estas dos rectas es el punto P y decimos que P es el punto de coordenadas (a, b).

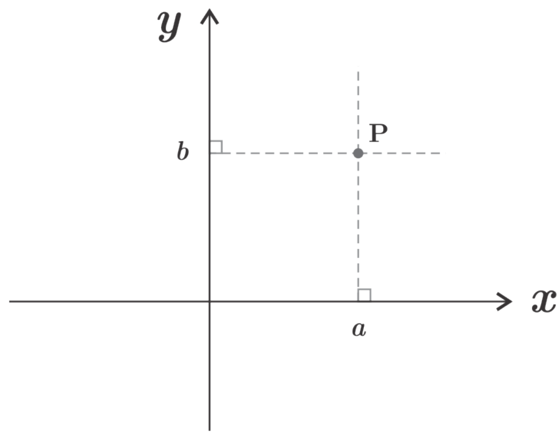

Figura 32.6

Concluimos entonces que a cada punto P en el plano xy le corresponde un par ordenado de números reales (a, b) y a cada par ordenado de números reales (a, b) le corresponde un punto P en el plano. Con base en lo anterior escribimos $P(a, b)$.

Ejemplo 32.4

Ubicar en el plano xy los siguientes puntos:

1. $P(1, 2)$.

2. $Q(-3, -4)$.

3. $R(-3, 0)$.

4. $S(0, 1)$.

Solución

1. Para situar el punto P en el plano, ubicamos el 1 sobre el eje x y trazamos una recta vertical que pase por 1; ubicamos el 2 sobre el eje y y trazamos una recta horizontal que pase por 2. El punto de corte de estas dos rectas es el punto P de coordenadas $(1, 2)$.

2. Ubiquemos -3 en el eje x y tracemos una recta vertical que pase por -3; ubiquemos -4 en el eje y y tracemos una recta horizontal que pase por -4. El punto de corte de estas dos rectas es Q.

3. R está sobre el eje x, porque su ordenada es 0 y está ubicado 3 unidades a la izquierda del origen de coordenadas O.

4. S está sobre el eje y. ¿Por qué?

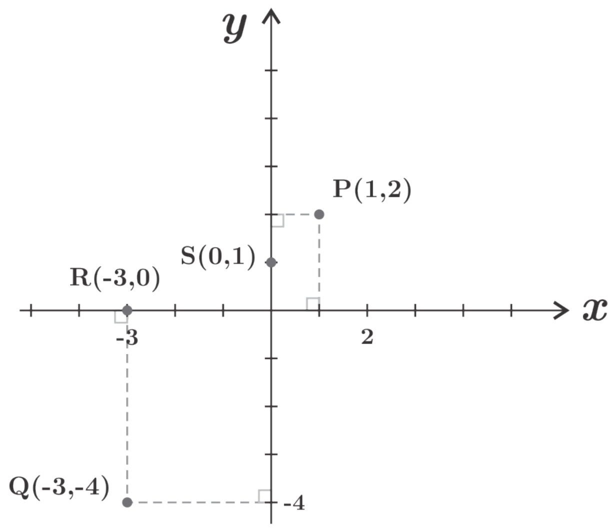

Figura 32.7

Nota

Aunque se acostumbra usar la misma unidad de medida en el eje x y en el eje y, en algunas ocasiones es conveniente usar unidades distintas. Por ejemplo, para ubicar el punto $P(2,-5.000)$, podemos usar el centímetro como unidad de medida para ubicar el 2 sobre el eje x, pero con esta unidad de medida no podríamos ubicar el 5.000 en el eje y, por lo que convenimos, por ejemplo, que un centímetro represente 1.000 unidades sobre el eje y.

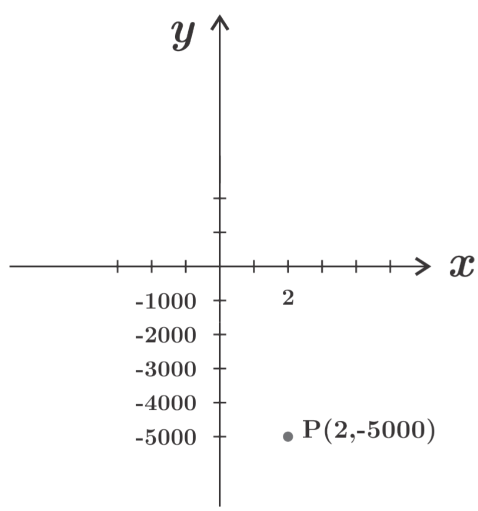

Figura 32.8

Ejemplo 32.5

Dibujar el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(0,6)$, $B(3,0)$ y $C(-3,0)$.

Solución

El punto $(0,6)$ tiene abscisa 0 y por tanto está situado sobre el eje y seis unidades arriba del origen. Los otros dos puntos tienen ordenada 0 entonces están ubicados sobre el eje x, el primero tres unidades a la derecha del origen y el segundo tres unidades a la izquierda del origen, como vemos en la figura. Uniendo estos puntos con segmentos de recta tenemos el triángulo cuyos vértices son los puntos $(0,6)$, $(3,0)$ y $(-3,0)$.

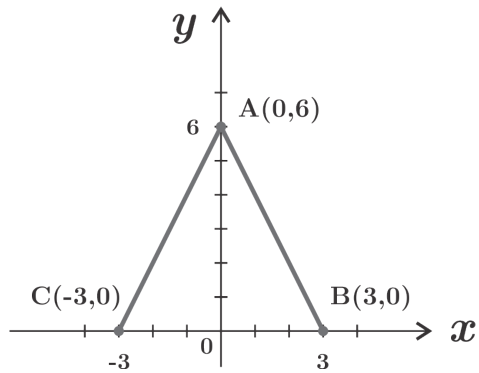

Figura 32.9

Ejercicios propuestos

1. Ubicar en el plano los puntos: $P(-7,10)$, $Q(3,-2)$, $R(5,4)$ y $S(-3,-1)$.
2. Dibujar el rectángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,-1)$, $B(1,-3)$, $C(6,-1)$ y $D(6,-3)$.
3. Dibujar el rombo cuyos vértices son los puntos $M(1,4)$, $N(3,1)$, $P(5,4)$ y $Q(3,7)$.

Respuestas

1. Los puntos se muestran en la gráfica

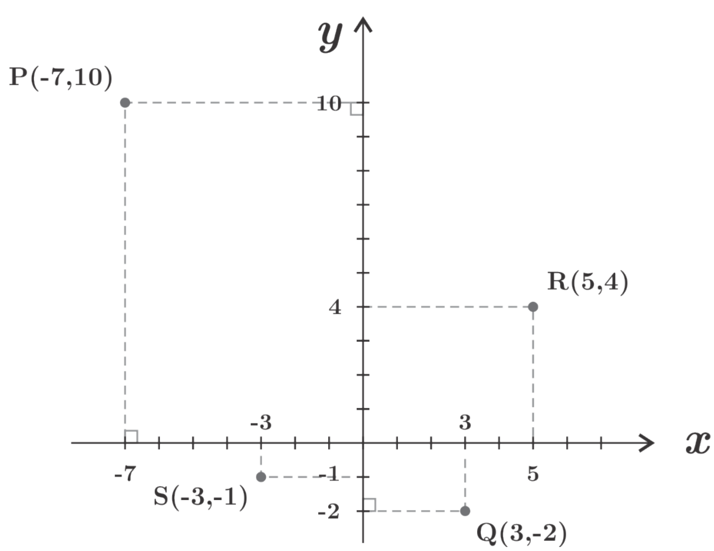

Figura 32.10

2. Rectángulo

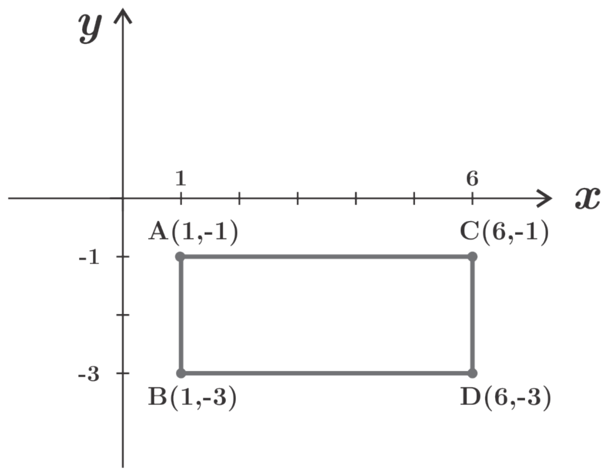

Figura 32.11

3. Rombo

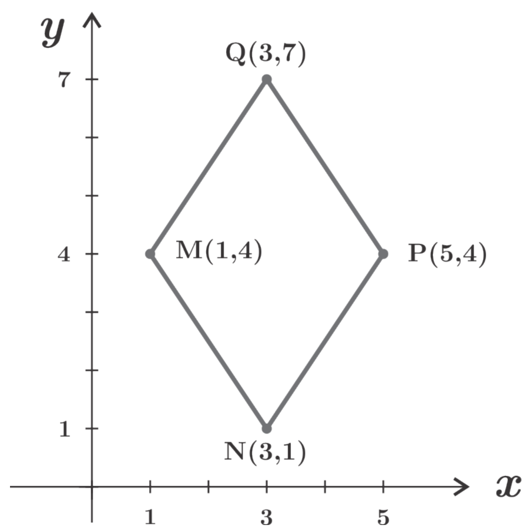

Figura 32.12

Lección 33

Ecuaciones lineales en dos variables

En esta lección iniciaremos el trabajo con ecuaciones de primer grado o lineales en dos variables. Dada una ecuación de este tipo, veremos cómo hallar sus soluciones y cómo trazar su gráfica en el plano cartesiano.

Como vimos en lecciones anteriores, una ecuación nos permite expresar matemáticamente la relación existente entre las cantidades involucradas en un problema. Hasta el momento sólo hemos trabajado con ecuaciones de primer grado en una variable, pero en algunos problemas es necesario plantear ecuaciones en más de una variable para expresar la dependencia o relación entre las cantidades del problema.

Ejemplo 33.1

- El área de un cuadrado es igual al cuadrado de la longitud de su lado. Si representamos la longitud del lado de un cuadrado por la letra l y su área por la letra A, podemos relacionar estas dos cantidades mediante la ecuación

  $$A = l^2.$$

  Ésta es una ecuación en las dos variables l y A. A menudo, cuando trabajamos con problemas de aplicación, acostumbramos asignarle a cada una de las variables una letra que nos recuerde la cantidad que representa.

- Como el área de un círculo depende de la longitud de su radio, si representamos el radio por la letra r y su área por la letra A sabemos que

  $$A = \pi r^2.$$

  Ésta es una ecuación en las dos variables r y A y nos permite expresar matemáticamente la relación entre r y A. En esta ecuación π es una constante.

- Si un auto se mueve a lo largo de una carretera recta con velocidad constante v durante un tiempo t, la distancia s que recorre en el tiempo t es igual a vt y podemos plantear la ecuación

  $$s = vt.$$

  Ésta es una ecuación en las dos variables t y s. En este caso la letra v representa un número fijo o constante.

En esta lección vamos a trabajar con ecuaciones de primer grado o lineales en dos variables.

Una **ecuación de primer grado o lineal en dos variables x y y** es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$Ax + By = C,$$

con A, B y C constantes y A y B no simultáneamente iguales a cero. En el ejemplo anterior la ecuación $s = vt$, que también podemos escribir como $vt - s = 0$, es una ecuación de primer grado en las variables t y s con $A = v$, $B = -1$ y $C = 0$.

Dada una ecuación de primer grado en dos variables x y y, si al sustituir en la ecuación x por un número real a y y por un número real b se obtiene un enunciado verdadero, se dice que el par ordenado (a, b) es una **solución de la ecuación**. Lo anterior es válido, en general, para cualquier ecuación en dos variables.

Ejemplo 33.2

1. Dada la ecuación de primer grado en dos variables $2x - y = 0$, si sustituimos x por 1 y y por 2 en la ecuación obtenemos $2(1) - 2 = 0$ ó $0 = 0$ que es un enunciado verdadero. Luego, el par ordenado $(1, 2)$ es una solución de la ecuación $2x - y = 0$.

   Si en la misma ecuación reemplazamos x por 0 y y por -1 obtenemos $2(0) - (-1) = 0$ ó $1 = 0$ que es un enunciado falso. Luego, el par ordenado $(0, -1)$ no es una solución de la ecuación $2x - y = 0$.

2. Consideremos nuevamente la ecuación del ejemplo 1. Si, por ejemplo, asignamos a x el valor de -1, lo sustituimos en la ecuación obteniendo $2(-1) - y = 0$ y resolvemos esta ecuación para y, tenemos $y = -2$. Esto es, cuando x vale -1, el correspondiente valor de y es -2. Luego, el par ordenado $(-1, -2)$ es una solución de la ecuación $2x - y = 0$. Verifiquemos reemplazando -1 y -2 por x y y respectivamente en la ecuación: $2(-1) - (-2) = 0$ ó $0 = 0$.

   De esta manera podemos hallar tantas soluciones de la ecuación $2x - y = 0$ como valores le asignemos a una de las variables y hallando los respectivos valores de la otra. Esto es, la ecuación $2x - y = 0$ tiene un número infinito de soluciones.

En general, si se tiene una ecuación de primer grado en dos variables, sus soluciones son pares ordenados de números reales, a diferencia de las ecuaciones de primer grado en una variable cuyas soluciones, si las hay, son números reales.

Además las ecuaciones de primer grado en dos variables, a diferencia de las ecuaciones de primer grado en una variable, tienen un número infinito de soluciones.

Gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables

Dada cualquier ecuación en dos variables, la representación geométrica en el plano cartesiano de todos los pares ordenados de números reales que son soluciones de la ecuación constituye la gráfica de la ecuación. Esto es, la **gráfica de una ecuación en dos variables** es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ cuyas coordenadas x y y satisfacen la ecuación.

Usualmente para trazar la gráfica de una ecuación en dos variables graficamos suficientes puntos para determinar a grandes rasgos la forma de la misma y luego aproximamos los puntos restantes trazando una "curva suave" por los puntos ya dibujados.

A medida que trabajemos con los casos más sencillos de este tipo de ecuaciones vamos identificando las formas de sus gráficas y ayudados de una tabla de valores, que se obtiene asignándole valores a una de las variables de la ecuación y hallando los correspondientes valores de la otra, podremos trazar una gráfica aproximada de la ecuación. Más adelante, en los cursos de Cálculo, estudiaremos otras técnicas que nos permitirán trazar con mayor precisión la gráfica de una gran variedad de ecuaciones.

En esta lección sólo aprenderemos a trazar la gráfica de una ecuación de primer grado o lineal en dos variables. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 33.3

Trazar la gráfica de la ecuación $3x - y = 2$.

Solución

$3x - y = 2$ es una ecuación de primer grado en x y y con $A = 3$, $B = -1$ y $C = 2$. Para trazar su gráfica construimos una tabla de valores, asignándole algunos valores a una de las variables, por ejemplo a x, y hallando los respectivos valores de y. Estos últimos se obtienen fácilmente si hallamos una ecuación equivalente a la ecuación dada en la cual y esté expresada en términos de x. Así,

$$\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ -y &= -3x + 2 \\ y &= 3x - 2 \end{aligned}$$

La ecuación $y = 3x - 2$ es equivalente a la ecuación $3x - y = 2$. Ahora asignando algunos valores a x obtenemos los correspondientes valores de y, por ejemplo, si $x = -1$ $y = -5$, si $x = 0$ $y = 2$ y así construimos la siguiente tabla de valores:

x	-1	0	1	2
y	-5	-2	1	4

Dibujamos los puntos obtenidos en la tabla de valores y observamos que todos "parecen" estar sobre una línea recta. Con la ayuda de una regla vemos que efectivamente estos puntos están sobre una recta y la trazamos.

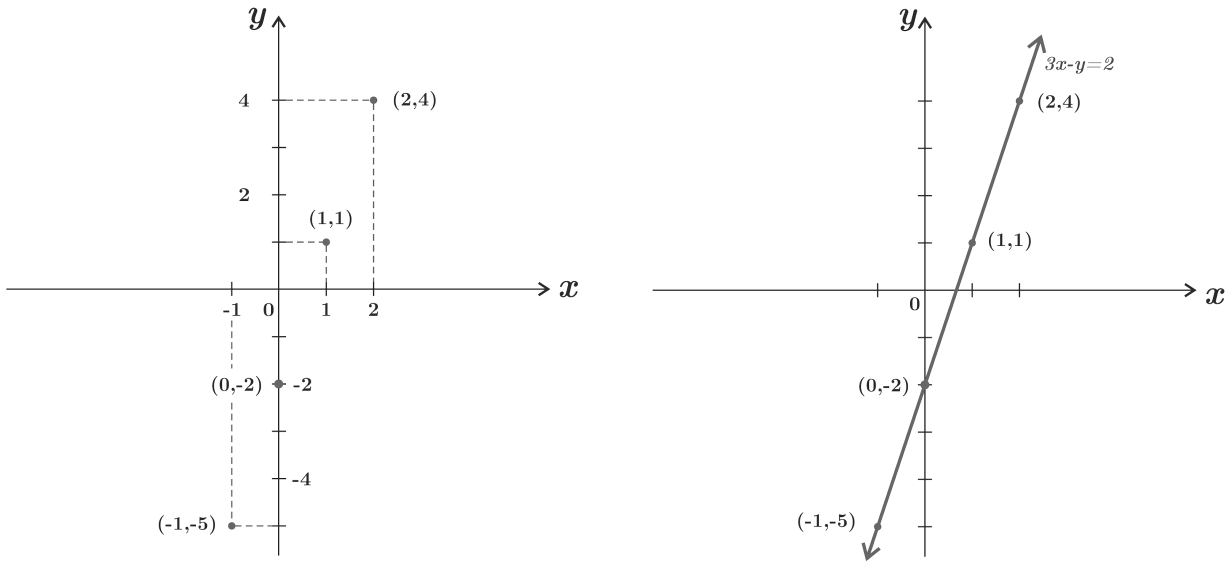

Figura 33.1

Si dibujamos cualquier otro punto cuyas coordenadas satisfagan la ecuación dada, éste estará sobre dicha recta.

Luego, la gráfica de la ecuación $3x-y=2$ es la línea recta que aparece en la figura. Notemos que la recta se extiende indefinidamente en ambas direcciones.

En general, **la gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables es una línea recta**. Por esta razón es tipo de ecuaciones reciben también el nombre de ecuaciones lineales en dos variables.

De la geometría sabemos que por dos puntos distintos en un plano pasa una única recta o, en otras palabras, dos puntos distintos del plano determinan una recta. Por tanto, para trazar la gráfica de una ecuación de primer grado o lineal en dos variables basta dibujar en el plano cartesiano dos puntos distintos cuyas coordenadas satisfagan la ecuación y luego trazar la línea recta determinada por ellos.

Al trazar la gráfica de una línea recta y, en general la gráfica de una ecuación en dos variables, es útil saber los puntos donde la gráfica corta a los ejes x y y, si los hay.

Un punto donde la gráfica de una ecuación en dos variables corta al eje x se llama **intercepto con el eje x** y un punto donde cruza al eje y se llama **intercepto con el eje y**. Para hallar estos puntos, si los hay, procedemos así:

- Para hallar el intercepto con el eje x hacemos $y=0$ en la ecuación dada y resolvemos para x (o despejamos x).
- Para hallar el intercepto con el eje y hacemos $x=0$ en la ecuación dada y resolvemos para y (o despejamos y).

En el ejemplo anterior, si hacemos $y=0$ en la ecuación $3x-y=2$ y resolvemos para x obtenemos $x=2/3$. Esto es, el intercepto con el eje x de la gráfica es el punto $(2/3,0)$. Si hacemos $x = 0$ y resolvemos para y obtenemos $y = -2$. Luego, el intercepto con el eje y es el punto $(0, -2)$, como puede observarse en la gráfica.

Ejemplo 33.4

Trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones:

1. $2x + y = 4$.
2. $y = x$.
3. $y = 2$.
4. $x = -3$

Solución

1. $2x + y = 4$ es una ecuación lineal en las variables x y y con $A = 2$, $B = 1$ y $C = 4$. Como su gráfica es una línea recta basta que dibujemos dos puntos cuyas coordenadas satisfagan la ecuación y luego trazamos la recta determinada por ellos. Podemos hallar, por ejemplo, los interceptos con los ejes x y y, si los hay, de la gráfica de la ecuación.

   Si hacemos $y = 0$ en la ecuación obtenemos $2x = 4$ ó $x = 2$. Luego, la recta cruza al eje x en el punto $(2, 0)$. Si hacemos $x = 0$ en la ecuación obtenemos $y = 4$. Luego, la recta corta al eje y en el punto $(0, 4)$.

   Dibujamos estos dos puntos $(2, 0)$ y $(0, 4)$, trazamos la recta determinada por ellos y obtenemos así la gráfica de la ecuación $2x + y = 4$.

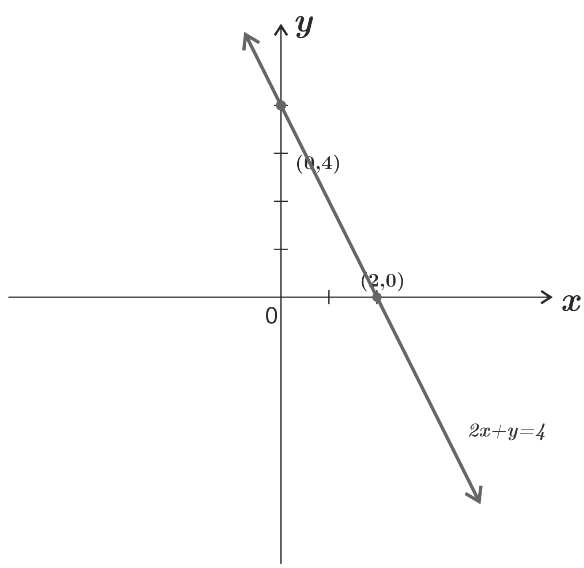

Figura 33.2

2. La ecuación $y = x$, que podemos escribir como $x - y = 0$, es una ecuación lineal en las variables x y y con $A = 1$, $B = -1$ y $C = 0$.

   Si hacemos $x = 0$ en la ecuación obtenemos $y = 0$. Esto es, la gráfica corta los dos ejes coordenados en el punto $(0, 0)$ u origen. Para graficar la recta basta que hallemos otro punto asignándole otro valor a x, por ejemplo $x = 1$, y obtenemos el punto $(1, 1)$. Dibujando estos dos puntos y trazando la recta determinada por ellos obtenemos la gráfica de la ecuación $y = x$.

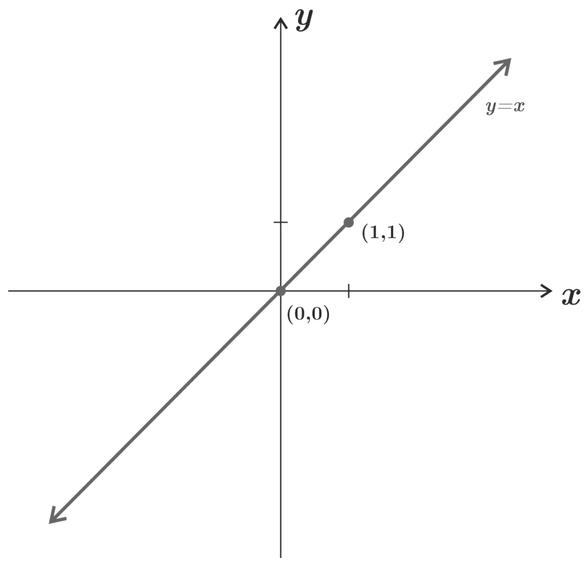

Figura 33.3

3. La ecuación $y = 2$, que podemos escribir como $0x + 1y = 2$, es una ecuación lineal en dos variables con $A = 0$, $B = 1$ y $C = 2$. Para cualquier valor que asignemos a x, inclusive $x = 0$, siempre obtenemos $y = 2$. Luego el intercepto con el eje y de la gráfica es $(0, 2)$ y todos sus puntos son de la forma $(x, 2)$, donde x es cualquier número real. Luego, la gráfica de la ecuación $y = 2$ es una línea recta horizontal (paralela al eje x) que corta al eje y en el punto $(0, 2)$. Observemos además que como y siempre vale 2, no hay ningún valor de x que corresponda a $y = 0$ y por ello la gráfica no tiene intercepto con el eje x.

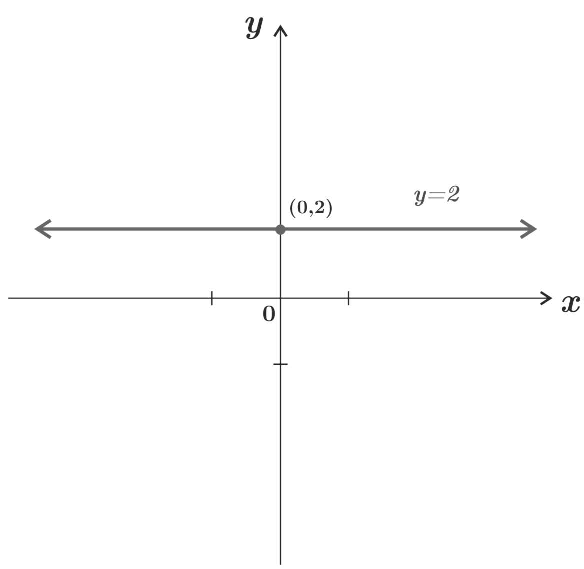

Figura 33.4

4. La ecuación $x = -3$, que podemos escribir como $1x + 0y = -3$, corresponde a una ecuación lineal en dos variables con $A = 1$, $B = 0$ y $C = -3$. Para cualquier valor que asignemos a y siempre obtenemos $x = -3$. Luego, la gráfica de la ecuación es una recta que corta al eje x en el punto $(-3, 0)$ y todos los puntos sobre ella son de la forma $(-3, y)$ donde y es cualquier número real. Como para ningún valor de y obtenemos $x = 0$, la recta no corta el eje y.

   Por tanto, la gráfica de la ecuación $x = -3$ es una recta vertical (paralela al eje y) que corta al eje x en el punto $(-3, 0)$.

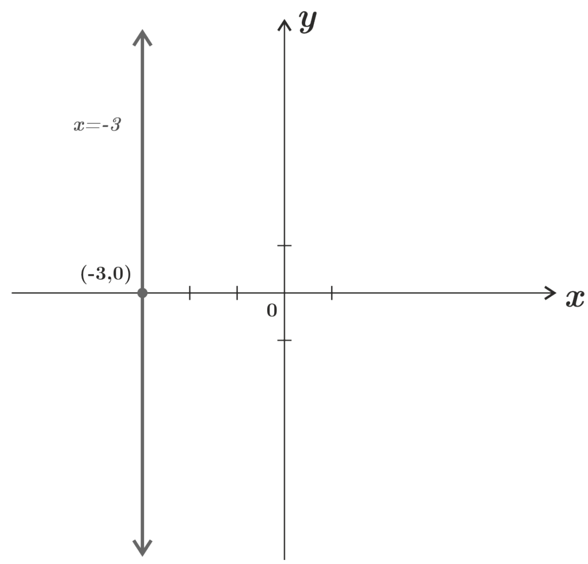

Figura 33.5

En general, como puede observarse en los ejemplos anteriores, una línea recta puede cortar ambos ejes coordenados o sólo uno de ellos.

Hemos visto que dada cualquier ecuación lineal en dos variables $Ax + By = C$ donde A y B no son simultáneamente iguales a cero, su gráfica es una línea recta. Se puede mostrar también que toda línea recta es la gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables.

Ejercicios propuestos

Para cada una de las siguientes ecuaciones lineales en dos variables, trazar su grafica y hallar los puntos de intersección de la gráfica con los ejes coordenados.

1. $x + y = 3$.
2. $y = x - 1$.
3. $2x - 3y = 6$.
4. $y + 1 = 0$.
5. $x = 4$.

Solución

1. Eje x: $(3,0)$; eje y: $(0,3)$.

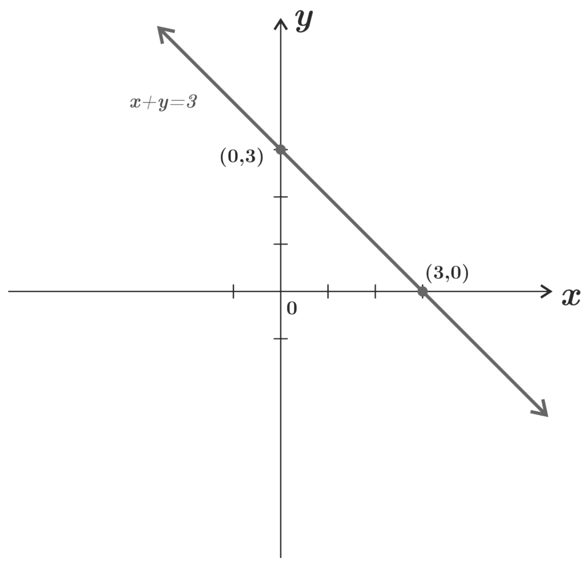

Figura 33.6

2. Eje x: $(1,0)$; eje y: $(0,-1)$.

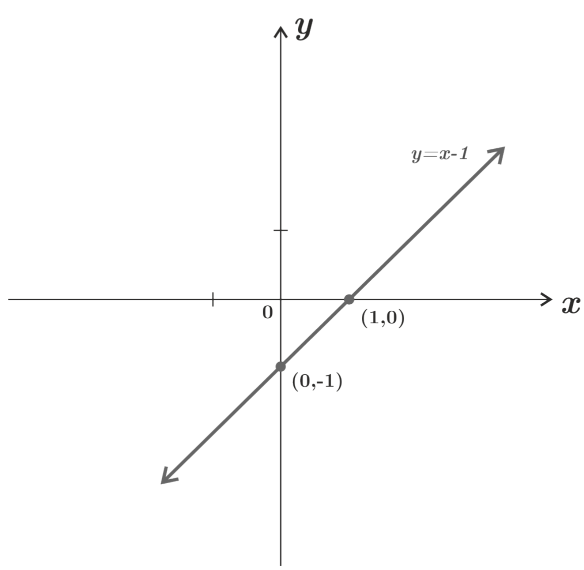

Figura 33.7

3. Eje x: $(3,0)$; eje y: $(0,-2)$.

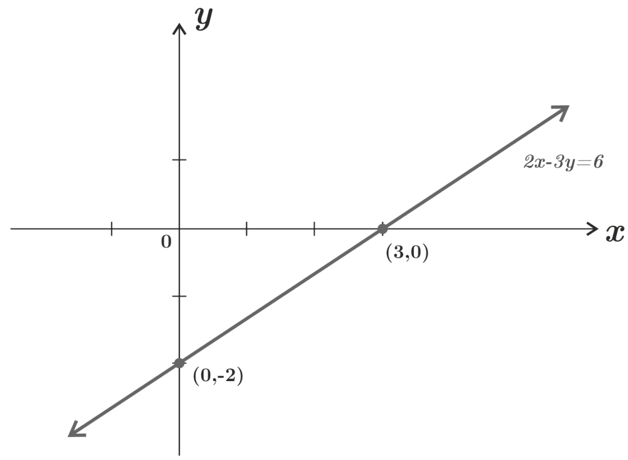

Figura 33.8

4. No intersecta el eje x; eje y: $(0, -1)$.

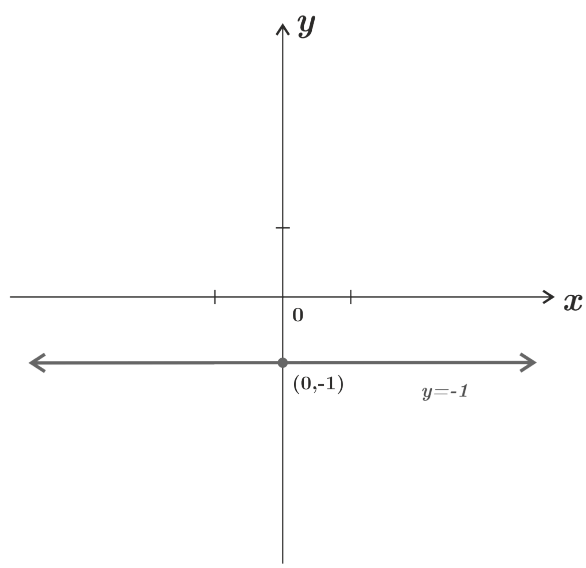

Figura 33.9

5. Eje x: $(4, 0)$; no intersecta el eje y.

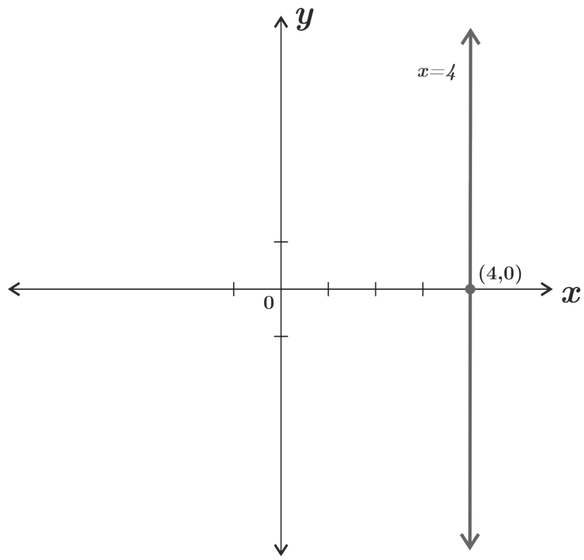

Figura 33.10

Lección 34

Sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables I

En esta lección aprenderemos qué es un sistema de ecuaciones, en particular un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables, su solución y uno de los métodos para hallarla.

En algunos problemas en los que interviene más de una variable, a veces es necesario plantear varias ecuaciones para establecer las relaciones entre las variables y resolver en forma simultánea dichas ecuaciones para hallar los valores de las variables que las satisfagan a todas.

En la lección de problemas veremos que se presentan situaciones en las que necesitamos por ejemplo, conocer los valores de x y y que satisfagan simultáneamente las ecuaciones $x-3y=4$ y $x-2y=5$.

Usualmente escribimos las dos ecuaciones así:

$$\begin{cases} x-3y &= 4 \\ x-2y &= 5 \end{cases}$$

y decimos que éste es un sistema de dos ecuaciones en dos variables.

Ejemplo 34.1

Los siguientes son sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x^2-2xy+3z &= 5 \\ x+y^2-5z &= -2 \end{cases}$

   es un sistema de dos ecuaciones en las tres variables x, y y z.

2. $\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ x-2y+3z &= -3 \\ 2x-y-z &= 0 \end{cases}$

   es un sistema de tres ecuaciones en x, y y z.

3. $\begin{cases} 2u-v &= 5 \\ 2u+v &= 3 \end{cases}$

   es un sistema de dos ecuaciones en las variables u y v.

Una **solución** de una sistema de dos o más ecuaciones en dos o más variables son los valores de las variables que satisfacen *simultáneamente* todas las ecuaciones del sistema.

Resolver un sistema de dos o más ecuaciones en dos o más variables es hallar todas las soluciones del sistema.

Ejemplo 34.2

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y &= 5 \\ x-y &= 1 \end{cases}$$

$x=3$ y $y=2$ es una solución del sistema porque si reemplazamos estos valores de x y y en las dos ecuaciones obtenemos enunciados verdaderos. En efecto,

$3+2=5$ Enunciado verdadero.
$3-2=1$ Enunciado verdadero.

$x=-1$ y $y=0$ no es una solución del sistema porque

$-1+0=-1\neq 5$ y $-1-0=-1\neq 1$.

$x=1$ y $y=4$ no es una solución del sistema porque

$1+4=5$ pero $1-4=-3\neq -1$.

Vamos a trabajar inicialmente con sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables, es decir, con sistemas de la forma

$$\begin{cases} ax+by &= c \\ dx+ey &= f \end{cases}$$

con a, b, c, d, e y f constantes y a y b ó d y e no simultáneamente iguales a 0.

¿Cómo resolver un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables?

Podemos usar uno de los siguientes métodos:

1. Sustitución.
2. Igualación.
3. Suma o resta.

Método de sustitución

Procedemos como sigue:

1. De una de las ecuaciones dadas despejamos una de las variables en términos de la otra.
2. Sustituimos la expresión hallada en 1. en la otra ecuación, para obtener una ecuación en una variable, la cual resolvemos para dicha variable.

3. Sustituimos el valor de la variable hallado en 2. en la expresión hallada en 1., para determinar el valor de la otra variable.

Los valores de las variables encontrados en 2. y 3. son una solución del sistema.

Es muy importante verficar que ambos valores satisfacen las dos ecuaciones del sistema dado.

Ejemplo 34.3

Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 5x + 3y & = 13 \qquad (1) \\ 3x - y & = 5 \qquad (2) \end{cases}$$

Solución

Observando las ecuaciones del sistema vemos que es más sencillo despejar y en la ecuación (2) y al hacerlo tenemos

$y = 3x - 5 \qquad (3)$

Si reemplazamos y por $3x - 5$ en la ecuación (1) tenemos $5x + 3(3x - 5) = 13$.

Resolvamos esta ecuación para x:

$$\begin{aligned} 5x + 9x - 15 &= 13 \\ 14x &= 28 \\ x &= \frac{28}{14} \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Si sustituimos x por 2 en la ecuación (3), obtenemos $y = 3(2) - 5 = 1$.

Por tanto, la solución del sistema es $x = 2$ y $y = 1$.

Verifiquemos que $x = 2$ y $y = 1$ es la solución del sistema original, reemplazando x por 2 y y por 1 en las dos ecuaciones del sistema:

En (1): $5(2) + 3(1) = 10 + 3 = 13$.

En (2): $3(2) - 1 = 6 - 1 = 5$.

Ejemplo 34.4

Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 6x + 5y & = 13 \qquad (1) \\ 7x - 4y & = 25 \qquad (2) \end{cases}$$

Solución

De la ecuación (1) despejamos x:

$$x = \frac{13 - 5y}{6} \qquad (3)$$

Sustituyendo x en la ecuación (2) tenemos $7\left(\dfrac{13-5y}{6}\right)-4y=25.$

Resolvamos esta ecuación para y, multiplicando ambos miembros por 6 para eliminar los denominadores:

$$\begin{aligned}7(13-5y)-24y&=150\\91-35y-24y&=150\\-59y&=59\\y&=-1.\end{aligned}$$

Sustituyendo y por -1 en (3) obtenemos $x=\dfrac{13-5(-1)}{6}=\dfrac{13+5}{6}=\dfrac{18}{6}=3.$

Por tanto la solución del sistema es $x=3$ y $y=-1$.

Comprobamos que efectivamente ésta es la solución del sistema sustituyendo los valores de x y y en las ecuaciones dadas:

En (1): $6(3)+5(-1)=18-5=13.$

En (2): $7(3)-4(-1)=21+4=25.$

Ejemplo 34.5

Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases}2x+5y &= -24 \qquad (1)\\ 8x-3y &= 19 \qquad (2)\end{cases}$$

Solución

De la ecuación (2) despejamos y:

$$y=\frac{8x-19}{3} \qquad (3)$$

Sustituimos y por $\dfrac{8x-19}{3}$ en la ecuación (1) y obtenemos $2x+5\left(\dfrac{8x-19}{3}\right)=-24.$

Resolvamos esta ecuación para x, multiplicando ambos miembros por 3 para eliminar los denominadores:

$$\begin{aligned}6x+40x-95&=-72\\46x&=23\\x&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Sustituyendo x por $\dfrac{1}{2}$ en (3) tenemos: $y=\dfrac{8\left(\frac{1}{2}\right)-19}{3}=\dfrac{-15}{3}=-5.$

Por tanto la solución del sistema es $x=\frac{1}{2}$ y $y=-5$.

Para comprobar que $x = \frac{1}{2}$ y $y = -5$ si es la solución del sistema sustituimos estos valores en las dos ecuaciones dadas:

En (1): $2\left(\frac{1}{2}\right) + 5(-5) = 1 - 25 = -24$.

En (2): $8\left(\frac{1}{2}\right) - 3(-5) = 4 + 15 = 19$.

Ejercicios propuestos

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, empleando el método de sustitución:

1. $\begin{cases} 4y + 3x &= 8 \\ 8x - 9y &= -77 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 10x + 18y &= -11 \\ 16x - 9y &= -5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 32x - 25y &= 13 \\ 16x + 15y &= 1 \end{cases}$

Respuestas

1. $x = -4$, $y = 5$.
2. $x = -\dfrac{1}{2}$, $y = -\dfrac{1}{3}$.
3. $x = \dfrac{1}{4}$, $y = -\dfrac{1}{5}$.

Lección 35

Sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables II

En esta lección aprenderemos a resolver sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables usando el método de igualación.

Método de igualación

Procedemos así:

1. Seleccionamos una de las variables y la despejamos en las dos ecuaciones dadas.
2. Igualamos las expresiones obtenidas en 1. resultando así una ecuación lineal en una variable.
3. Resolvemos la ecuación hallada en 2.
4. Sustituimos el valor encontrado en 3. en cualesquiera de las expresiones obtenidas en 1., para hallar el valor de la otra variable.

Ejemplo 35.1

Resolver, por el método de igualación, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 9x + 7y & = -4 \qquad (1) \\ 11x - 13y & = -48 \qquad (2) \end{cases}$$

Solución

Despejamos x en la ecuación (1): $x = \dfrac{-4 - 7y}{9}$ (3)

Despejamos x en la ecuación (2): $x = \dfrac{13y - 48}{11}$ (4)

Igualamos las expresiones obtenidas en (3) y (4)

$$\frac{-4 - 7y}{9} = \frac{13y - 48}{11}.$$

De esta manera eliminamos x y obtuvimos una ecuación lineal en y.

Resolvamos esta ecuación para y multiplicando ambos miembros por 99 para eliminar los denominadores:

$$
\begin{aligned}
11(-4-7y) &= 9(13y-48)\\
-44-77y &= 117y-432\\
-194y &= -388\\
y &= 2.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo este valor de y en cualesquiera de las expresiones halladas para x, por ejemplo en (3), tenemos: $x = \dfrac{-4-7(2)}{9} = \dfrac{-18}{9} = -2$

Luego, la solución del sistema es $x = -2$ y $y = 2$.

Verifiquemos que estos valores satisfacen las ecuaciones del sistema original, reemplazándolos en las dos ecuaciones:

En (1): $(9)(-2) + (7)(2) = -18 + 14 = -4$.

En (2): $(11)(-2) - (13)(2) = -22 - 26 = -48$.

Ejemplo 35.2

Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{cases}
3x - 2y &= -2 \qquad (1)\\
5x + 8y &= -60 \qquad (2)
\end{cases}
$$

Solución

Despejamos y en (1): $y = \dfrac{3x+2}{2}$ (3)

Despejamos y en (2): $y = \dfrac{-60-5x}{8}$ (4)

Igualamos las expresiones obtenidas en (3) y (4)

$$\frac{3x+2}{2} = \frac{-60-5x}{8}.$$

De esta manera eliminamos y y nos resulta una ecuación lineal en x.

Resolvemos esta ecuación para x, multiplicando ambos miembros de la ecuación por 8 para eliminar los denominadores

$$
\begin{aligned}
4(3x+2) &= -60-5x\\
12x+8 &= -60-5x\\
17x &= -68\\
x &= -4.
\end{aligned}
$$

Sustituimos este valor de x en (3) para obtener $y = \dfrac{3(-4)+2}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5$.

Luego, la solución del sistema es: $x = -4$ y $y = -5$.

Verifiquemos que estos valores satisfacen las ecuaciones originales:

En (1): $(3)(-4)-(2)(-5)=-12+10=-2$.

En (2): $(5)(-4)+(8)(-5)=-20-40=-60$.

Ejemplo 35.3

Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y &= 6 \qquad (1) \\ 5x-4y &= 12 \qquad (2) \end{cases}$$

Solución

Despejamos y en (1): $y=6-x$ (3)

Despejamos y en (2): $y=\dfrac{5x-12}{4}$ (4)

Igualamos las expresiones obtenidas en (3) y (4)

$$6-x=\frac{5x-12}{4}.$$

De esta manera eliminamos y y nos resulta una ecuación lineal en x.

Resolvemos esta ecuación para x, multiplicando ambos miembros de la ecuación por 4 para eliminar los denominadores:

$$\begin{aligned} 4(6-x) &= 5x-12 \\ 24-4x &= 5x-12 \\ 36 &= 9x \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Sustituimos este valor de x en (3) para obtener $y=6-4=2$.

Luego, la solución del sistema es: $x=4$ y $y=2$.

Verifiquemos que estos valores satisfacen las ecuaciones originales:

En (1): $4+2=6$.

En (2): $5(4)-4(2)=20-8=12$.

Ejemplo 35.4

Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x-2y &= 6 \qquad (1) \\ 9x-6y &= -3 \qquad (2) \end{cases}$$

Solución

Despejamos y en (1): $y=\dfrac{3x-6}{2}$ (3)

Despejamos y en (2): $y=\dfrac{9x+3}{6}$ (4)

Igualamos las expresiones obtenidas en (3) y (4)

$$\frac{3x-6}{2} = \frac{9x+3}{6}.$$

De esta manera eliminamos y y nos resulta una ecuación lineal en x.

Resolvemos esta ecuación para x, multiplicando ambos miembros de la ecuación por 6 para eliminar los denominadores

$$\begin{aligned} 3(3x-6) &= 9x+3 \\ 9x-18 &= 9x+3 \\ 0x &= 21. \end{aligned}$$

El sistema no tiene solución ya que no hay ningún número real que multiplicado por 0 de 21.

Ejercicios propuestos

Resolver cada uno de los siguientes sistemas por el método de igualación:

1. $\begin{cases} 4x+5y & = -32 \\ 3x-5y & = 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x & = -4y \\ 5x-6y & = 38. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-2y & = 6 \\ 2x-4y & = 5. \end{cases}$

Respuestas

1. $x = -3$, $y = -4$.

2. $x = 4$, $y = -3$.

3. No tiene solución.

Lección 36

Sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables III

En esta lección aprenderemos el método de eliminación por suma o resta, conocido también como método de eliminación por adición o sustracción, que es el más usado para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables.

Método de suma o resta

Procedemos así:

1. Multiplicamos cada ecuación por un número apropiado, diferente de cero, para que los coeficientes de una de las variables en las dos ecuaciones sean iguales o difieran sólo en sus signos.
2. Sumamos o restamos, dependiendo de los signos, miembro a miembro estas nuevas ecuaciones para obtener una ecuación en una sola variable, la cual resolvemos para hallar el valor de esa variable.
3. Sustituimos el valor encontrado en 2. en cualesquiera de las ecuaciones dadas para encontrar el valor de la otra variable.

Para aplicar este método usamos la propiedad de los números reales que enunciamos así:

Si a, b, c y d son números reales tales que

$$a = b$$

y

$$c = d$$

entonces,

$$a + c = b + d$$

y

$$a - c = b - d.$$

Es decir, si sumamos o restamos miembro a miembro dos igualdades, la igualdad se conserva.

Por ejemplo, si $5 = 5$ y $3 = 3$ entonces, $5 + 3 = 5 + 3$ y $5 - 3 = 5 - 3$.

Si $x = 2$ y $y = 7$, entonces $x + y = 2 + 7$ y $x - y = 2 - 7$.

Ilustremos con ejemplos la aplicación del método de eliminación por suma o resta descrito arriba.

Ejemplo 36.1

Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 7x + 4y &= 13 \qquad (1) \\ 5x - 2y &= 19 \qquad (2) \end{cases}$$

Solución

Como el coeficiente de y es 4 en la ecuación (1), basta multiplicar la ecuación (2) por 2, para que los coeficientes de y en las dos ecuaciones sólo difieran en el signo:

$2\,(5x - 2y) = 2\,(19)\,.$

Al realizar estas operaciones obtenemos

$10x - 4y = 38 \qquad (3)$

Si sumamos miembro a miembro las ecuaciones (1) y (3), tenemos $17x = 51$.

Luego, $x = 3$.

Al sustituir x por 3 en la ecuación (2) obtenemos $5(3) - 2y = 19$.

Resolvamos esta ecuación para y:

$$\begin{aligned} 5(3) - 2y &= 19 \\ -2y &= 4 \\ y &= -2. \end{aligned}$$

Luego, la solución del sistema es $x = 3$ y $y = -2$.

Verifiquemos que estos valores son la solución del sistema reemplazándolos en las ecuaciones dadas.

En (1): $7(3) + 4(-2) = 21 - 8 = 13.$

En (2): $5(3) - 2(-2) = 15 + 4 = 19.$

Ejemplo 36.2

Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 4x - 11y &= -3 \qquad (1) \\ 6x + 7y &= 19 \qquad (2) \end{cases}$$

Solución

Multiplicamos la ecuación (1) por 3 y la ecuación (2) por 2 para igualar los coeficientes de x.

$3(4x - 11y) = 3(-3)$
$2(6x + 7y) = 2(19).$

Realizamos operaciones en ambas ecuaciones

$12x - 33y = -9 \qquad (3)$
$12x + 14y = 38 \qquad (4)$

Restando miembro a miembro la ecuación (3) de la ecuación (4) obtenemos $47y = 47$ y dividiendo ambos miembros entre 47 tenemos que $y = 1$.

Sustituimos el valor de $y = 1$ en la ecuación (1) y obtenemos la ecuación:

$4x - 11(1) = -3.$

Resolvamos esta ecuación para x.

$$\begin{aligned} 4x &= -3 + 11 \\ 4x &= 8 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Luego, la solución del sistema es $x = 2$ y $y = 1$.

Verifiquemos que estos valores satisfacen las dos ecuaciones del sistema dado, y para ello los reemplazamos en las ecuaciones originales:

En (1): $4(2) - 11(1) = 8 - 11 = -3.$

En (2): $6(2) + 7(1) = 12 + 7 = 19.$

Ejemplo 36.3

Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x - 3y &= 6 \qquad (1) \\ 3x + 2y &= 12 \qquad (2) \end{cases}$$

Solución

Los coeficientes de cada una de las variables en ambas ecuaciones son distintos. Como en este caso es indiferente seleccionar x ó y como variable a eliminar, escojamos y. Al multiplicar por 2 la ecuación (1) y por 3 la ecuación (2), los coeficientes de y en las nuevas ecuaciones sólo difieren en los signos, así que basta sumar miembro a miembro estas ecuaciones para eliminar la variable y, así:

$2(2x - 3y) = 2(6)$
$3(3x + 2y) = 3(12).$

Efectuando operaciones tenemos:

$4x - 6y = 12 \qquad (3)$
$9x + 6y = 36 \qquad (4)$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (3) y (4) obtenemos $13x = 48$ y dividiendo ambos miembros de esta ecuación entre 13, tenemos que $x = \dfrac{48}{13}$.

Sustituimos $x = \dfrac{48}{13}$ en la ecuación (1) obteniendo $2\left(\dfrac{48}{13}\right) - 3y = 6$.

Resolvamos esta ecuación para y, multiplicando por 13 ambos miembros para eliminar los denominadores:

$$\begin{aligned} 96 - 39y &= 78 \\ 18 &= 39y \\ y &= \frac{18}{39} \\ y &= \frac{6}{13}. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del sistema es $x = \dfrac{48}{13}$ y $y = \dfrac{6}{13}$.

Verifiquemos que efectivamente ésta es la solución reemplazando x por $\dfrac{48}{13}$ y y por $\dfrac{6}{13}$ en las dos ecuaciones del sistema dado.

En (1): $2\left(\dfrac{48}{13}\right) - 3\left(\dfrac{6}{13}\right) = \dfrac{96}{13} - \dfrac{18}{13} = \dfrac{78}{13} = 6.$

En (2): $3\left(\dfrac{48}{13}\right) + 2\left(\dfrac{6}{13}\right) = \dfrac{144}{13} + \dfrac{12}{13} = \dfrac{156}{13} = 12.$

Nota: El ejemplo anterior se pudo haber resuelto si al principio se hubiera eliminado la variable x en vez de y. En algunos casos el proceso de eliminación puede ser más extenso dependiendo de la selección de la variable. Por tanto, es bueno analizar las ecuaciones antes de resolver el sistema y seleccionar la variable que exija menos operaciones.

Ejercicios propuestos

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de suma o resta:

1. $\begin{cases} 10x - 3y &= 36 \\ 2x + 5y &= -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x - 15y &= 1 \\ -x - 6y &= 8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 18x + 5y &= -11 \\ 12x + 11y &= 31 \end{cases}$

Respuestas

1. $x = 3$, $y = -2$.
2. $x = -2$, $y = -1$.
3. $x = -2$, $y = 5$.

Lección 37

Representación gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables

En esta lección veremos cómo representar gráficamente un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables, a partir de las gráficas de las dos ecuaciones que son dos líneas rectas, las cuales pueden cortarse en un punto, ser paralelas o coincidir. Ilustraremos mediante ejemplos estas situaciones, algunas con sistemas resueltos analíticamente en lecciones anteriores, y propondremos sistemas de ecuaciones para que el lector represente gráficamente las ecuaciones y la solución.

Consideremos el sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables:

$$\begin{cases} ax + by &= c \qquad (1) \\ dx + ey &= f \qquad (2) \end{cases}$$

con a, b, c, d, e y f constantes y a y b ó d y e no simultáneamente iguales a 0.

Como la gráfica de una ecuación lineal en dos variables es una línea recta, entonces podemos representar gráficamente este sistema mediante dos líneas rectas en el plano, correspondientes a las gráficas de las ecuaciones (1) y (2).

De la geometría sabemos que dadas dos líneas rectas en el plano, ocurre una y sólo una de las siguientes posibilidades:

1. Las dos rectas se cortan en un único punto.
2. Las dos rectas son paralelas, es decir, no tienen ningún punto en común.
3. Las dos rectas coinciden, es decir, todos sus puntos son comunes.

Cuando representamos gráficamente las ecuaciones del sistema puede ocurrir:

1. Las dos rectas se cortan en un único punto. Como este punto está sobre las dos rectas, sus coordenadas satisfacen las dos ecuaciones y por tanto son la solución del sistema.
2. Las dos rectas son paralelas y al no tener un punto en común, no hay valores de x y y que satisfagan ambas ecuaciones. Por tanto, el sistema no tiene solución.
3. Las dos rectas coinciden o, en otras palabras, son la gráfica de la misma ecuación. Entonces, el sistema tiene infinitas soluciones que corresponden a las coordenadas de cada uno de los puntos de la recta.

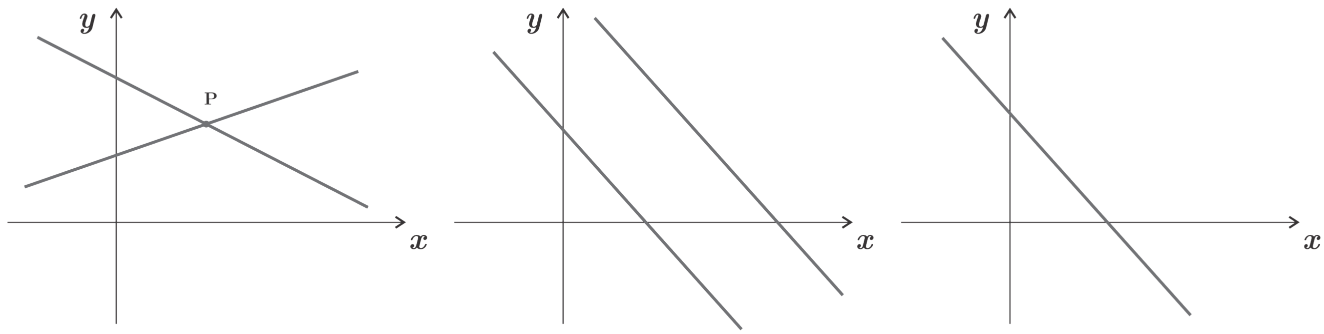

Figura 37.1

Ilustremos con algunos ejemplos cada uno de los casos descritos arriba.

Ejemplo 37.1

Consideremos el sistema del ejemplo 35.3

$$\begin{cases} x + y & = 6 \qquad (1) \\ 5x - 4y & = 12 \qquad (2) \end{cases}$$

Cuando resolvimos este sistema encontramos que $x = 4$ y $y = 2$ satisfacen ambas ecuaciones. La solución del sistema la podemos escribir como el par ordenado $(x, y) = (4, 2)$ y a éste le corresponde un punto del plano, el punto de coordenadas $(4, 2)$.

Como las coordenadas de este punto satisfacen la ecuación (1), entonces el punto $(4, 2)$ está sobre la gráfica de esta ecuación, y como también satisfacen la ecuación (2), el punto $(4, 2)$ es un punto de la gráfica de la segunda ecuación y por tanto es un punto sobre ambas gráficas, en otras palabras, es el punto de intersección de las dos gráficas.

Veamos

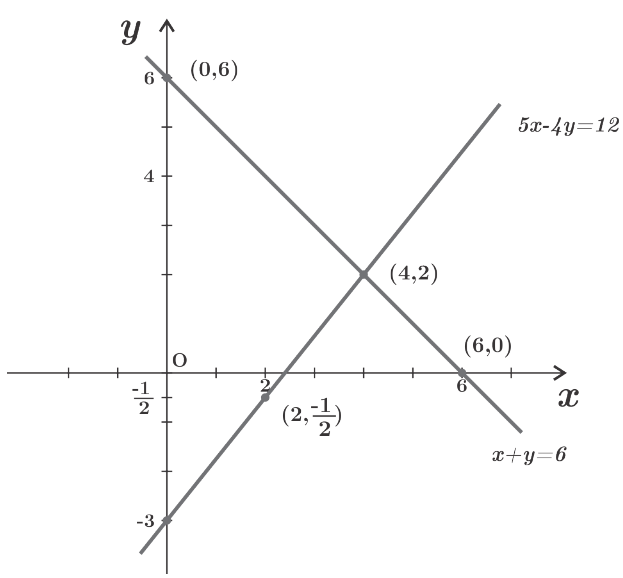

Figura 37.2

Sabemos que para graficar una ecuación lineal en x y y basta con dar dos valores distintos a x, encontrar los correspondientes valores de y, ubicar en el plano los puntos cuyas coordenadas son los valores de x y y obtenidos y trazar la recta determinada por ellos.

Grafiquemos la ecuación (1) hallando los interceptos con los ejes coordenados:

Si $x = 0$, entonces $y = 6$. Si $y = 0$ entonces $x = 6$. Luego, los puntos $(0, 6)$ y $(6, 0)$ están sobre la gráfica de la ecuación (1), que es la recta determinada por ellos.

Para graficar la ecuación (2), si $x = 0$, encontramos que $y = -3$ y para $x = 2$, tenemos $y = -\dfrac{1}{2}$. Luego, los puntos $(0, -3)$ y $(2, -\dfrac{1}{2})$ están sobre la gráfica de la ecuación (2), que es la recta determinada por ellos.

Al ubicar en el plano el punto de coordenadas $(4, 2)$, correspondiente a la solución del sistema, vemos que pertenece a la gráfica de las dos ecuaciones, de hecho es el punto de intersección de las dos gráficas.

Nota

En adelante cuando nos refiramos a la grafica de una ecuación lineal en dos variables, por ejemplo la gráfica de la ecuación $ax + by = c$ (1), hablaremos de la recta (1). Así, en el ejemplo anterior diremos, por ejemplo, que el punto $(0, -1)$ está sobre la recta (1).

Ejemplo 37.2

Consideremos el sistema resuelto en el ejemplo 35.4

$$\begin{cases} 3x - 2y &= 6 \qquad (1) \\ 9x - 6y &= -3. \qquad (2) \end{cases}$$

Grafiquemos la recta cuya ecuación es $3x - 2y = 6$.

Si $x = 2$, $y = 0$ y si $x = 4$, $y = 3$. Luego, la gráfica de la ecuación es la recta determinada por los puntos $(2, 0)$ y $(4, 3)$.

Los puntos $(1, 2)$ y $(-1, -1)$ determinan la recta (2). ¿Por qué?

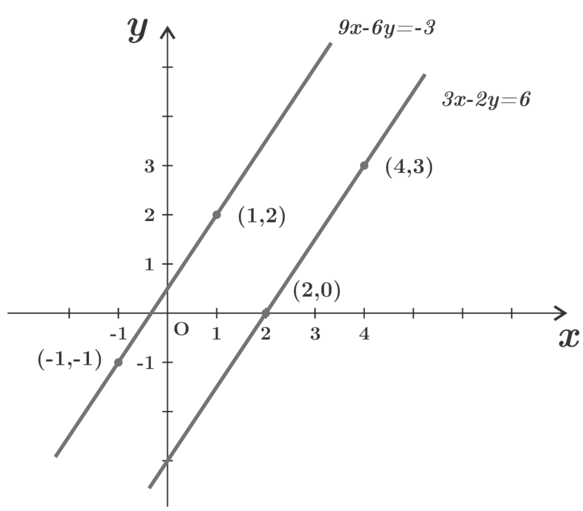

Figura 37.3

En la gráfica observamos que las rectas no tienen ningún punto en común, es decir, son paralelas. Por tanto, el sistema no tiene solución, lo cual coincide con el resultado obtenido en el ejemplo 35.4.

Ejemplo 37.3

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - 2y & = 6 \qquad (1) \\ -2x + 4y & = -12 \qquad (2) \end{cases}$$

Grafiquemos las dos ecuaciones.

En la ecuación (1), para $x = 0$, $y = -3$ y si $x = 2$, $y = -2$. Luego, la gráfica de la ecuación (1) es la recta determinada por los puntos $(0, -3)$ y $(2, -2)$.

Podemos comprobar que estos dos puntos también están sobre la recta (2). Luego las dos rectas coinciden y las soluciones del sistema son las coordenadas de todos los puntos sobre la recta $x - 2y = 6$, o sobre la recta $-2x + 4y = -12$, ya que ambas rectas coinciden.

Al multiplicar la ecuación (1) por -2 obtenemos $-2x + 4y = -12$ que es la ecuación (2). Luego, el sistema se reduce a una ecuación lineal en dos variables, que como vimos, tiene infinitas soluciones.

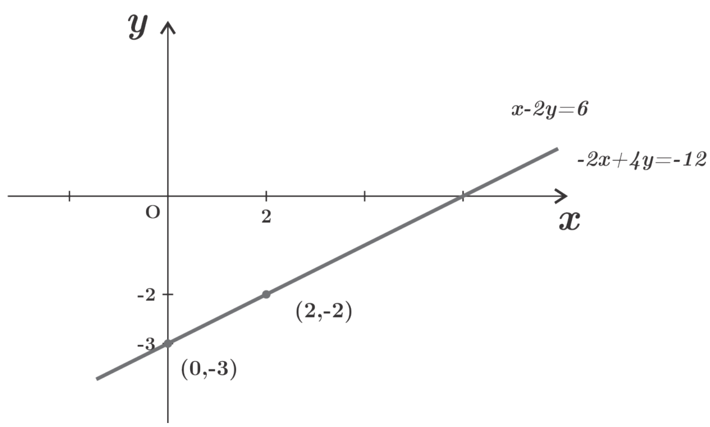

Figura 37.4

Ejercicios propuestos

Representar gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones, propuestos antes como ejercicios para resolver por el método de igualación

1. $\begin{cases} 4x + 5y & = -32 \\ 3x - 5y & = 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x & = -4y \\ 5x - 6y & = 38. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - 2y & = 6 \\ 2x - 4y & = 5. \end{cases}$

Respuestas

Sistema 1.

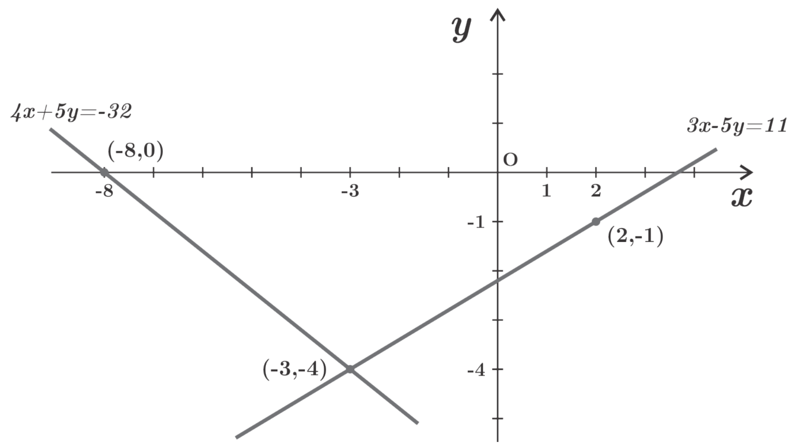

Figura 37.5

Sistema 2.

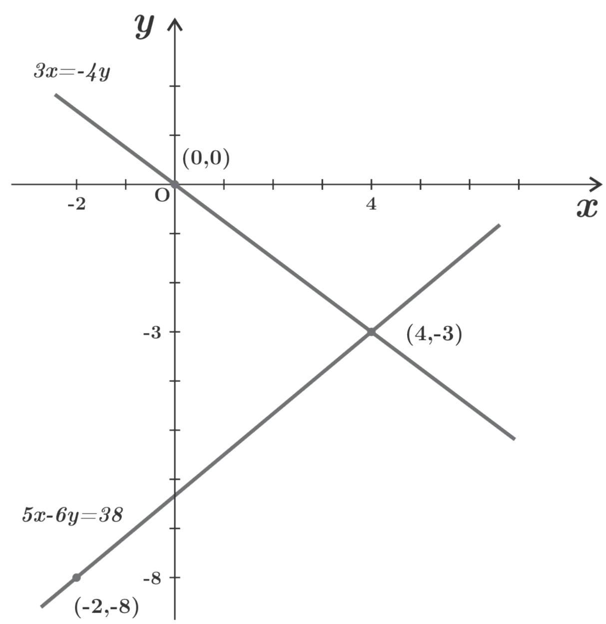

Figura 37.6

Sistema 3.

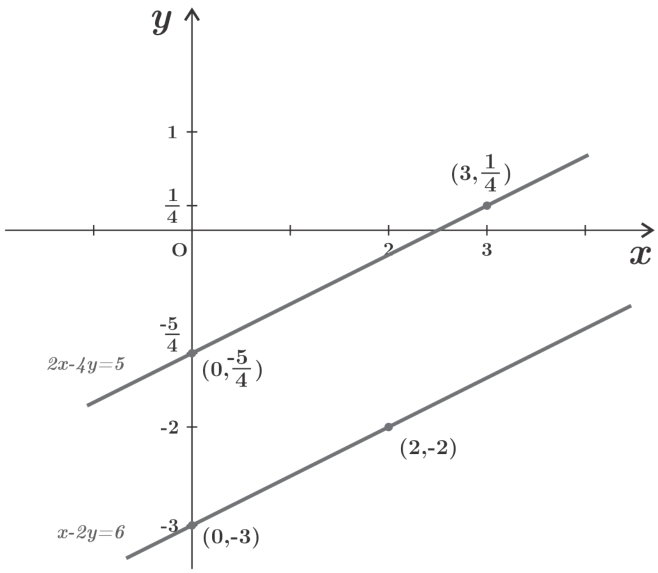

Figura 37.7

Lección 38

Solución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales en dos variables I

En esta lección aprenderemos a resolver problemas que involucran la solución de sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables, utilizando los métodos trabajados en lecciones anteriores, explicando tanto el planteamiento de las ecuaciones como la solución del sistema. Propondremos algunos problemas para que el estudiante resuelva.

En lecciones anteriores resolvimos problemas que sólo involucraban una variable, en los cuales planteábamos y resolvíamos una ecuación en esa variable. Pero en otros problemas aparece más de una cantidad desconocida y para resolverlos, en algunos casos, es más fácil y en otros necesario, introducir más de una variable y plantear más de una ecuación.

Después de resolver un problema, es importante verificar que los valores obtenidos satisfacen las condiciones del problema. Aquí no lo haremos pero lo dejamos como ejercicio para el lector.

Iniciemos con un problema planteado y resuelto antes usando una sola variable y luego lo resolvemos usando dos variables.

Problema 1

La edad de Pedro es el triple de la de Juan y las dos edades suman 40 años. Hallar ambas edades.

Solución

Sea x la edad de Juan. Como la edad de Pedro es el triple de la edad de Juan, entonces la edad de Pedro es $3x$.

Ahora, como la suma de ambas edades es 40, entonces

$$x + 3x = 40.$$

Resolviendo la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} 4x &= 40 \\ x &= 10. \end{aligned}$$

Entonces la edad de Juan es 10 años y la edad de Pedro, que es tres veces la de Juan, es 30 años.

Resolvamos este mismo problema con dos variables:

Sean x la edad de Juan y y la edad de Pedro.

Como la suma de las edades de Juan y Pedro es 40 años y la edad de Juan es tres veces la de Pedro, tenemos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 40 & (1) \\ y = 3x & (2) \end{cases}$$

Resolviendo este sistema podemos hallar las correspondientes edades.

Sustituyendo y por $3x$ en la ecuación (1) tenemos $x + 3x = 40$.

Resolviendo esta ecuación obtenemos $x = 10$ y reemplazando x por 10 en la ecuación (2) obtenemos $y = 30$.

Estos valores de x y y son los mismos encontrados al resolver el problema con una variable.

Problema 2

Si a 5 veces el mayor de dos números se añade 7 veces el menor, la suma es 316, y si a 9 veces el menor se resta el cuádruple del mayor, la diferencia es 83. Hallar los números.

Solución

Sean x el número mayor y y el número menor. Entonces $5x$ es cinco veces el mayor y $7y$ es siete veces el menor. Por tanto,

$5x + 7y = 316 \qquad (1)$

y como $9y$ es nueve veces el menor y $4x$ es el cuádruple del mayor entonces

$9y - 4x = 83 \qquad (2)$

Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} 5x + 7y = 316 & (1) \\ 9y - 4x = 83 & (2) \end{cases}$$

Usamos el método de igualación, despejando x en ambas ecuaciones:

De (1): $x = \dfrac{316 - 7y}{5} \qquad (3)$

De (2): $x = \dfrac{9y - 83}{4} \qquad (4)$

Igualando (3) y (4) tenemos

$$\frac{316 - 7y}{5} = \frac{9y - 83}{4}$$

Resolvamos esta ecuación para y, multiplicando ambos miembros por 20 para eliminar los denominadores

$$1.264 - 28y = 45y - 415$$
$$1.264 + 415 = 45y + 28y$$

$$\begin{aligned} 1.679 &= 73y \\ y &= \frac{1.679}{73} \\ y &= 23. \end{aligned}$$

Sustituyendo y por 23 en (3) tenemos

$$x = \frac{316 - (7)(23)}{5} = \frac{155}{5} = 31.$$

Luego, los dos números son 31 y 23.

Problema 3

La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número es 12, y si al número se resta 18, las cifras se invierten. Hallar el número.

Solución

Sean x la cifra de las decenas y y la cifra de las unidades. Entonces

$x + y = 12 \qquad (1)$

Como el número es $10x + y$, al invertir las cifras tendríamos $10y + x$ y entonces,

$$10x + y - 18 = 10y + x.$$

Reduciendo términos semejantes y simplificando obtenemos la ecuación

$x - y = 2 \qquad (2)$

Con las ecuaciones (1) y (2) tenemos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 12 & (1) \\ x - y = 2 & (2) \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2) obtenemos $2x = 14$ y dividiendo entre 2 tenemos $x = 7$.

Reemplazando x por 7 en la ecuación (2) obtenemos $y = 5$.

Luego, el número es 75.

Problema 4

En un de un día de vacaciones un estudiante decidió visitar a sus padres, yendo y viniendo por diferentes caminos. El viaje de regreso fue 4 kilómetros más corto que la mitad del viaje de ida. El recorrido total, ida y regreso, fue de 68 kilómetros. Determinar la distancia recorrida en cada tramo.

Solución

Sean x la distancia recorrida en el viaje de ida y y la distancia recorrida en el viaje de regreso.

Con los datos del problema, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} - 4 & (1) \\ x + y = 68 & (2) \end{cases}$$

Resolvamos este sistema por el método de sustitución:

$$\begin{aligned} x + \frac{x}{2} - 4 &= 68 && \text{Sustituimos } y \text{ por } \frac{x}{2} - 4 \text{ en la ecuación (2)} \\ x + \frac{x}{2} &= 68 + 4 && \text{Trasponemos términos} \\ \frac{3x}{2} &= 72 && \text{Reducimos términos semejantes} \\ x &= 48 && \text{Despejamos } x. \end{aligned}$$

Reemplazando x por 48 en la ecuación (1) obtenemos $y = \dfrac{48}{2} - 4 = 24 - 4 = 20$.

Luego, el viaje de ida fue de 48 kilómetros y el de regreso de 20 kilómetros, para un total de 68 kilómetros.

Problema 5

La colecta de la Cruz Roja en una escuela primaria fue de 450.000 pesos. Si había 650 niños y cada uno aportó una moneda de 500 pesos o una moneda de 1.000 pesos, ¿cuántas monedas de cada valor hubo en la colecta?

Solución

Sean x la cantidad de monedas de 500 pesos y y la cantidad de monedas de 1.000 pesos.

Como cada niño dió una moneda, el total de monedas es igual al total de niños, es decir, $x + y = 650 \qquad (1)$

La cantidad de dinero recogida fue de 450.000 pesos entre ambos tipos de monedas. Por tanto, $500x + 1.000y = 450.000$

Dividiendo ambos miembros de esta ecuación entre 500 tenemos

$x + 2y = 900 \qquad (2)$

Luego, tenemos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 650 & (1) \\ x + 2y = 900 & (2) \end{cases}$$

Usemos el método de sustitución:

Despejamos x de la ecuación (1) y obtenemos

$x = 650 - y. \qquad (3)$

Reemplazamos la expresión para x en la ecuación (2) y tenemos $650 - y + 2y = 900$.

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} -y + 2y &= 900 - 650 && \text{Trasponemos términos} \\ y &= 250 && \text{Despejamos } y. \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de y en la ecuación (3) obtenemos $x = 650 - 250 = 400$.

Luego, se aportaron 400 monedas de 500 pesos y 250 de 1.000 pesos.

Problema 6

Un padre le dice a su hijo: hace 6 años tu edad era $\frac{1}{5}$ de la mía; dentro de 9 años será los $\frac{2}{5}$. Hallar las edades actuales.

Solución

Sean x la edad actual del padre y y la edad actual del hijo.

Hace 6 años la edad del padre era $x - 6$ y la edad del hijo era $y - 6$.

Dentro de 9 años la edad del padre será $x + 9$ y la del hijo será $y + 9$.

De acuerdo con las condiciones del problema, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y - 6 = \dfrac{1}{5}(x - 6) \\ y + 9 = \dfrac{2}{5}(x + 9) \end{cases}$$

Si multiplicamos por 5 ambos miembros de ambas ecuaciones para eliminar los denominadores y reducimos términos semejantes, tenemos

$$\begin{cases} 5y - x = 24 & (1) \\ 5y - 2x = -27 & (2) \end{cases}$$

Restando miembro a miembro la ecuación (2) de la ecuación (1), obtenemos $x = 51$.

Sustituyendo x por 51 en la ecuación (1) tenemos $5y - 51 = 24$ y resolviendo esta ecuación obtenemos $y = 15$.

Luego, las edades actuales del hijo y del padre son 15 años y 75 años respectivamente.

Problemas propuestos

1. La edad de A excede en 13 años a la de B y el doble de la edad de B excede en 29 años a la edad de A. Hallar ambas edades.

2. En una sala de cine hay 700 personas entre adultos y niños. Cada adulto pagó 4.000 pesos y cada niño pagó 1.500 por su entrada. La recaudación fué de 1.800.000 pesos. ¿Cuántos adultos y cuántos niños hay en la sala?

3. Pedro le dice a Juan: si me das 15.000 pesos tendré 5 veces lo que te queda y Juan le dice a Pedro: si tú me das 20.000 pesos tendré 3 veces lo que te quede. ¿Cuánto tiene cada uno?

Respuestas

1. Edad de A 55 años y edad de B 42 años.

2. 300 adultos y 400 niños.

3. Pedro tiene 35.000 pesos y Juan tiene 25.000 pesos.

Lección 39

Solución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales en dos variables II

En esta lección, continuaremos con la solución de problemas que involucran un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables.

Problema 1

Un comerciante gastó 67.200.000 pesos comprando vestidos a 3.750.000 pesos y sombreros a 450.000 pesos. Si la suma del número de vestidos y el número de sombreros es 54, ¿cuántos vestidos y cuántos sombreros compró?

Solución

Sean x el número de vestidos y y el número de sombreros que compró el comerciante.

Con los costos de los artículos, tenemos la ecuación

$3.750.000\ x + 450.000\ y = 67.200.000.$

Simplificamos dividiendo ambos miembros entre 10.000 para facilitar las operaciones y obtenemos

$375x + 45y = 6.720.$

Como compró un total de 54 artículos, entonces $x + y = 54$.

Tenemos entonces el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 54 & (1) \\ 375x + 45y = 6.720 & (2) \end{cases}$$

Resolvemos este sistema por el método de sustitución:

Despejando y de (1) obtenemos

$$y = 54 - x \qquad (3)$$

Sustituyamos y en (2) y resolvamos la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} 375x + 45(54 - x) &= 6.720 \\ 375x + 2.430 - 45x &= 6.720 \\ 330x &= 4.290 \end{aligned}$$

$$x = 13.$$

Reemplazando el valor de x en (3) obtenemos $y = 54 - 13 = 41$.

Luego, el comerciante compró 13 vestidos y 41 sombreros.

Problema 2

El perímetro de un salón rectangular es 18 metros y 4 veces el largo equivale a 5 veces el ancho. Hallar las dimensiones del salón.

Solución

Sean x el largo y y el ancho del salón rectangular. Entonces su perímetro, que es la suma de las longitudes de los lados, es $2x + 2y$.

De acuerdo a las condiciones del problema, planteamos el sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18 & (1) \\ 4x = 5y & (2) \end{cases}$$

Resolvamos el sistema por el método de sustitución:

Despejamos x de la ecuación (2) y obtenemos

$$x = \frac{5y}{4} \qquad (3)$$

Reemplazamos x en (1) y resolvemos la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{5y}{4}\right) + 2y &= 18 \\ 5y + 4y &= 36 \\ y &= 4. \end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de y en (3) y obtenemos $x = \dfrac{5 \cdot 4}{4} = 5$.

Luego, las dimensiones del salón son 5 metros de largo y 4 metros de ancho.

Problema 3

7 kilos de café y 6 de té cuestan 48.000 pesos; 9 kilos de té y 8 de café cuestan 64.500 pesos. ¿Cuánto cuesta un kilo de café y cuánto un kilo de té?

Solución

Sean x el costo de un kilo de café y y el costo de un kilo de té.

Según el enunciado del problema, planteamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 7x + 6y = 48.000 & (1) \\ 8x + 9y = 64.500 & (2) \end{cases}$$

Despejamos y de la ecuación (1) obteniendo

$$y = \frac{48.000 - 7x}{6} \qquad (3)$$

Sustituimos y en (2) y resolvemos la ecuación resultante:

$$\begin{aligned}
8x + 9\left(\frac{48.000 - 7x}{6}\right) &= 64.500\\
16x + 144.000 - 21x &= 129.000\\
144.000 - 129.000 &= 21x - 16x\\
15.000 &= 5x\\
x &= 3.000.
\end{aligned}$$

Reemplazamos x por 3.000 en (3) para encontrar y:

$y = \dfrac{48.000 - 7(3.000)}{6} = \dfrac{27.000}{6} = 4.500.$

Luego, el kilo de café cuesta 3.000 pesos y el kilo de té cuesta 4.500 pesos.

Problema 4

Ayer, en el trabajo, gané 10.000 pesos más que hoy. Si lo que gané hoy es los $\dfrac{5}{6}$ de lo que gané ayer, ¿cuánto gané cada día?

Solución

Sean x lo que gané ayer y y lo que gané hoy.

Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones, según el enunciado del problema:

$$\begin{cases} x = y + 10.000 & (1)\\ y = \dfrac{5}{6}x & (2)\end{cases}$$

Para resolver este sistema por sustitución, reemplazamos y por $\dfrac{5}{6}x$ en la ecuación (1) y obtenemos

$$x = \frac{5}{6}x + 10.000.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned}
x - \frac{5}{6}x &= 10.000 && \text{Trasponiendo términos}\\
6x - 5x &= 60.000 && \text{Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por 6}\\
x &= 60.000 && \text{Reducimos términos semejantes.}
\end{aligned}$$

Reemplazamos x por 60.000 en la ecuación (2) y encontramos $y = \dfrac{5}{6}(60.000) = 50.000.$

Luego, ayer gané 60.000 pesos y hoy gané 50.000 pesos.

Problema 5

Los $\frac{3}{7}$ de la edad de A aumentados en los $\frac{3}{8}$ de la edad de B suman 15 años, y los $\frac{2}{3}$ de la edad de A disminuidos en los $\frac{3}{4}$ de la de B equivalen a 2 años. Hallar ambas edades.

Solución

Sean x la edad de A y y la edad de B.

Planteamos la primera ecuación:

$\frac{3}{7}x + \frac{3}{8}y = 15.$

Multiplicamos ambos miembros por 56 para eliminar denominadores

$56\left(\frac{3}{7}x + \frac{3}{8}y\right) = (56)(15)$

y simplificando tenemos $24x + 21y = 840$.

Dividimos ambos miembros entre 3 para simplificar esta ecuación

$8x + 7y = 280 \qquad (1)$

La segunda ecuación que podemos plantear es

$\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = 2.$

Multiplicamos ambos miembros por 12 y así eliminamos denominadores

$12\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y\right) = (12)(2)$

Efectuando operaciones obtenemos

$8x - 9y = 24 \qquad (2)$

Reunimos las ecuaciones (1) y (2) y tenemos el sistema

$$\begin{cases} 8x + 7y = 280 & (1) \\ 8x - 9y = 24 & (2) \end{cases}$$

Restando miembro a miembro la ecuación (2) de la ecuación (1) obtenemos $16y = 256$ y dividiendo ambos miembros entre 16 tenemos $y = 16$.

Reemplazamos y por 16 en la ecuación (1), para encontrar el correspondiente valor de x:

$$\begin{aligned} 8x + 7(16) &= 280 \\ 8x &= 280 - 112 = 168 \\ x &= 21. \end{aligned}$$

Luego, la edad de A es 21 años y la de B es 16 años.

Problemas propuestos

1. Hallar dos números tales que 5 veces el mayor exceda a $\frac{1}{5}$ del menor en 222 y 5 veces el menor exceda a $\frac{1}{5}$ del mayor en 66.
2. La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número es 15, y si al número se resta 9, las cifras se invierten. Hallar el número.
3. Se tienen 419.000 pesos en 287 billetes de 1.000 pesos y de 2.000 pesos. ¿Cuántos billetes son de 1.000 pesos y cuántos de 2.000 pesos?

Respuestas

1. 45 y 15.
2. 87.
3. 155 de 1.000 pesos y 132 de 2.000 pesos.

Lección 40

Sistemas de tres ecuaciones lineales en tres variables

En esta lección aprenderemos a resolver sistemas de tres ecuaciones lineales en tres variables.

En problemas de la vida práctica, profesional o académica, con frecuencia se requiere plantear y resolver ecuaciones que involucran varias variables. Ya vimos problemas en los que intervienen dos variables, para los cuales fue necesario plantear dos ecuaciones que permitieran establecer las relaciones entre las variables, y aprendimos varios métodos para resolver en forma simultánea dichas ecuaciones.

En esta lección vamos a resolver sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables, es decir, sistemas de la forma:

$$\begin{cases} ax + by + cz &= d \\ ex + fy + gz &= h \\ ix + jy + kz &= l \end{cases}$$

con a, b y c ó e, f y g ó i, j y k constantes no simultáneamente iguales a 0.

Una **solución** de este sistema son los valores de las variables x, y y z que satisfacen simultáneamente las tres ecuaciones.

Una forma de resolver este tipo de sistemas es la siguiente: Eliminamos una de las variables de dos de las ecuaciones dadas. Luego combinamos la otra ecuación con una de las dos ecuaciones anteriores para eliminar en éstas, la misma variable que se eliminó antes. Obtenemos así un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables, que resolvemos por alguno de los métodos utilizados en las lecciones anteriores. Reemplazamos los valores obtenidos en una de las tres ecuaciones originales, para hallar el valor de la otra variable.

Es importante verificar que los valores obtenidos satisfacen las tres ecuaciones del sistema.

Ejemplo 40.1

Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + y + z &= 8 \qquad (1) \\ 3x - 2y - z &= 1 \qquad (2) \\ 4x - 7y + 3z &= 10 \qquad (3) \end{cases}$$

Solución

En este sistema vemos que es fácil eliminar la variable z.

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2), obtenemos

$5x - y = 9 \qquad (4)$

Para encontrar otra ecuación en términos de x y y, multiplicamos por 3 la ecuación (2) para que los coeficientes de z en la ecuación (3) y en la nueva ecuación difieran sólo en el signo, obteniendo

$9x - 6y - 3z = 3 \qquad (5)$

Sumando las ecuaciones (3) y (5), obtenemos: $13x - 13y = 13$, ó, $13(x - y) = 13$, que es equivalente a

$x - y = 1 \qquad (6)$

Resolvemos el sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables conformado por las ecuaciones (4) y (6):

$$\begin{cases} 5x - y &= 9 \qquad (4) \\ x - y &= 1 \qquad (6) \end{cases}$$

Restamos miembro a miembro la ecuación (6) de la ecuación (4) y obtenemos $4x = 8$.

Luego, $x = 2$.

Si reemplazamos este valor de x en la ecuación (6) tenemos $2 - y = 1$. Resolviendo esta ecuación obtenemos $y = 2 - 1 = 1$.

Sustituyendo x por 2 y y por 1 en la ecuación (1), tenemos $2(2) + 1 + z = 8$.

Resolviendo esta ecuación obtenemos $z = 3$.

Luego, la solución del sistema es $x = 2$, $y = 1$ y $z = 3$.

Verifiquemos que ésta es la solución del sistema original, reemplazando estos valores en las ecuaciones dadas:

En (1): $2(2) + 1 + 3 = 4 + 1 + 3 = 8$.

En (2): $3(2) - 2(1) - 3 = 6 - 2 - 3 = 1$.

En (3): $4(2) - 7(1) + 3(3) = 8 - 7 + 9 = 10$.

Ejemplo 40.2

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z &= 12 \qquad (1) \\ 2x - y + z &= 7 \qquad (2) \\ x + 2y - z &= 6 \qquad (3) \end{cases}$$

Solución

Si sumamos miembro a miembro las ecuaciones (1) y (3) obtenemos:

$2x + 3y = 18 \qquad\qquad (4)$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (2) y (3) obtenemos:

$3x + y = 13 \qquad\qquad (5)$

Hemos eliminado la variable z y obtuvimos un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 18 & \qquad (4) \\ 3x + y = 13 & \qquad (5) \end{cases}$$

Resolvamos este sistema para hallar x y y.

Multiplicando por 3 la ecuación (5) para que los coeficientes de y sean iguales, tenemos

$9x + 3y = 39 \qquad\qquad (6)$

Restando miembro a miembro la ecuación (4) de la ecuación (6) obtenemos $7x = 21$.

Luego, $x = 3$.

Sustituyendo x por 3 en la ecuación (5) tenemos $3(3) + y = 13$.

Resolviendo esta ecuación obtenemos $y = 4$.

Reemplazando x por 3 y y por 4 en la ecuación (1), tenemos que $z = 5$.

Luego, la solución del sistema es $x = 3$, $y = 4$ y $z = 5$.

Es fácil verificar que ésta es la solución del sistema.

Ejemplo 40.3

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -x + y - z & = 2 \qquad (1) \\ x + y + z & = -1 \qquad (2) \\ x - y - z & = 2 \qquad (3) \end{cases}$$

Solución

Si sumamos las ecuaciones (1) y (2), tenemos $2y = 1$. Por tanto, $y = \dfrac{1}{2}$.

Si sumamos las ecuaciones (2) y (3) obtenemos $2x = 1$. Luego, $x = \dfrac{1}{2}$.

Reemplazando estos valores en cualesquiera de las ecuaciones originales, por ejemplo en la ecuación (3), obtenemos:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-z=2$$

$$-z=2$$

$$z=-2.$$

Luego, la solución del sistema es $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ y $z=-2$.

Verifiquemos que ésta es la solución del sistema original, reemplazando estos valores en las ecuaciones dadas:

En (1): $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-(-2)=2.$

En (2): $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2=1-2=-1.$

En (3): $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-(-2)=2.$

Ejemplo 40.4

Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \qquad (1)\\ \quad 2y-z &= 7 \qquad (2)\\ \qquad\quad 2z &= 6 \qquad (3)\end{cases}$$

Solución

Observando las ecuaciones del sistema vemos que es más sencillo resolverlo por sustitución.

Resolvemos la ecuación (3) para z y obtenemos $z=3$.

Sustituimos z por 3 en la ecuación (2) y obtenemos la ecuación $2y-3=7$.

Resolviendo esta ecuación obtenemos $y=5$.

Si sustituimos z por 3 y y por 5 en la ecuación (1), tenemos la ecuación $x+5+3=3$. Al resolver esta ecuación obtenemos $x=-5$.

Por tanto, la solución del sistema es $x=-5$, $y=5$ y $z=3$.

Verifiquemos que la solución del sistema original es $x=-5$, $y=5$ y $z=3$, reemplazando estos valores en las ecuaciones dadas:

En (1): $-5+5+3=3.$

En (2): $2(5)-3=10-3=7.$

En (3): $2(3)=6.$

Ejercicios propuestos

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x - y + z &= 2 \\ x + y + z &= 4 \\ 2x + 2y - z &= -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x - 2y + z &= 24 \\ 2x + 5y - 2z &= -14 \\ x - 4y + 3z &= 26 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y + z &= 8 \\ 2x + z &= 9 \\ 3y + 2x &= -3 \end{cases}$

Respuestas

1. $x = -1$, $y = 1$ y $z = 4$.
2. $x = 3$, $y = -2$ y $z = 5$.
3. $x = 0$, $y = -1$ y $z = 9$.

Lección 41

Solución de problemas con sistemas de tres ecuaciones lineales en tres variables

En esta lección vamos a resolver problemas que involucran la solución de sistemas de tres ecuaciones lineales en tres variables. En general, después de leer y entender el enunciado del problema y plantear el sistema, lo resolvemos como ya vimos en la lección anterior. Dejamos unos problemas al lector para que utilice las estrategias aplicadas.

Problema 1

Una organización agrupa a sus asociados en tres categorías: blancos, azules y amarillos. El total de asociados es 285. El número total de amarillos y azules es mayor en 15 unidades que el doble del número de blancos. El número total de blancos y azules es mayor en 45 unidades que el triple del número de amarillos. Determinar el número de miembros que pertenecen a cada categoría.

Solución

Llamemos x los asociados agrupados en blancos, y a los asociados agrupados en azules y z a los asociados agrupados en amarillos.

Según el enunciado, podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=285 \\ y+z=2x+15 \\ x+y=3z+45 \end{cases}$$

Trasponemos términos de tal manera que las variables queden en el lado izquierdo de las ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=285 & (1) \\ -2x+y+z=15 & (2) \\ x+y-3z=45 & (3) \end{cases}$$

Observamos que si restamos miembro a miembro la ecuación (2) de la (1), eliminamos las variables y y z y obtenemos $3x=270$ y así $x=90$.

Reemplazando x por 90 en las ecuaciones (2) y (3) y simplificando, tenemos:

$$\begin{cases} y+z=195 & (4) \\ y-3z=-45 & (5) \end{cases}$$

Resolvamos este sistema para y y z.

Si restamos miembro a miembro la ecuación (5) de la (4) tenemos $4z = 240$. Luego, $z = 60$.

Reemplazamos el valor de z en (4) y despejamos y obteniendo $y = 195 - 60 = 135$.

Luego, en la categoría de blancos hay 90 asociados, en la de azules hay 135 y en la de amarillos hay 60.

Como ejercicio, verificar si la solución dada satisface las condiciones del problema.

Problema 2

Alicia gastó 410.000 pesos en un vestido, un par de zapatos y un bolso. El costo del bolso y los zapatos es 10.000 pesos más que el costo del vestido. El costo del vestido y el bolso es 70.000 pesos menos que el doble del costo de los zapatos. ¿Cuánto costó cada artículo?

Solución

Llamemos x al costo del vestido, y al costo de los zapatos y z al costo del bolso.

De acuerdo al enunciado, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 410.000 \\ z + y = x + 10.000 \\ x + z + 70.000 = 2y \end{cases}$$

Reorganizando los términos en cada ecuación, reescribimos el sistema así:

$$\begin{cases} x + y + z = 410.000 & (1) \\ -x + y + z = 10.000 & (2) \\ x - 2y + z = -70.000 & (3) \end{cases}$$

Eliminemos la variable x.

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2) y obtenemos $2y + 2z = 420.000$.

Dividiendo entre 2 ambos miembros, tenemos

$$y + z = 210.000 \qquad (4)$$

Sumamos miembro a miembro (2) y (3) para eliminar x y simplificando obtenemos

$$-y + 2z = -60.000 \qquad (5)$$

Tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones en dos variables

$$\begin{cases} y + z = 210.000. & (4) \\ -y + 2z = -60.000 & (5) \end{cases}$$

Resolvamos este sistema.

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (4) y (5) tenemos $3z = 150.000$ y así $z = 50.000$.

Reemplazamos el valor de z en (4) y despejamos y obteniendo $y = 160.000$.

Reemplazamos los valores encontrados de z y y en la ecuación (2) y despejamos x:

$x = 160.000 + 50.000 - 10.000 = 200.000$.

Luego, el vestido costó 200.000 pesos, los zapatos 160.000 pesos y el bolso 50.000 pesos.

Problema 3

La suma de tres números es 37. El menor disminuido en 1 equivale a $\frac{1}{3}$ de la suma del mayor y el mediano; la diferencia entre el mediano y el menor equivale al mayor disminuido en 13. Hallar los números.

Solución

Sean x el número menor, y el mediano y z el mayor.

Según los datos del problema tenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 37 \\ x - 1 = \dfrac{1}{3}(y + z) \\ y - x = z - 13 \end{cases}$$

Reorganizando los términos de las ecuaciones tenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 37 & (1) \\ 3x - y - z = 3 & (2) \\ -x + y - z = -13 & (3) \end{cases}$$

Resolvamos este sistema.

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2) tenemos $4x = 40$, luego $x = 10$.

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (1) y (3) obtenemos $2y = 24$. Por tanto, $y = 12$.

Sustituyendo y y x en (1), obtenemos $10 + 12 + z = 37$, o sea $z = 15$.

Luego, los números pedidos son 10 , 12 y 15.

Problema 4

Un hombre tiene 110 animales entre vacas, caballos y terneros. $\frac{1}{8}$ del número de vacas más $\frac{1}{9}$ del número de caballos más $\frac{1}{5}$ del número de terneros equivalen a 15 animales y la suma del número de terneros con el de las vacas es 65. ¿Cuántos animales de cada clase tiene?

Solución

Sean x el número de vacas, y el número de caballos y z el número de terneros.

Teniendo en cuenta una de las condiciones del problema, planteamos la primera ecuación:

$\frac{1}{8}x + \frac{1}{9}y + \frac{1}{5}z = 15.$

Eliminamos los denominadores multiplicando ambos miembros por 360, y tenemos

$45x + 40y + 72z = 5.400.$

Con esta ecuación y las demás condiciones del problema, planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 110 & (1) \\ 45x + 40y + 72z = 5.400 & (2) \\ x + z = 65 & (3) \end{cases}$$

Reemplazamos el valor de $x+z$ de la ecuación (3) en la ecuación (1) y obtenemos $y+65 = 110$. Luego, $y = 45$.

Reemplazando y por 45 en la ecuación (2) tenemos $45x + (40)(45) + 72z = 5.400$.

Efectuamos operaciones y obtenemos $45x + 72z = 3.600$.

Dividiendo entre 9 ambos miembros tenemos

$$5x + 8z = 400 \qquad (4)$$

Con ésta y la ecuación (3) tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + z = 65 & (3) \\ 5x + 8z = 400 & (4) \end{cases}$$

Resolvamos este sistema por sustitución.

Despejando z de (3) tenemos

$$z = 65 - x \qquad (5)$$

Reemplazando z por $65 - x$ en (4) tenemos $5x + 8(65 - x) = 400$.

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 5x - 8x &= 400 - 520 \\ -3x &= -120 \\ x &= 40. \end{aligned}$$

Reemplazamos x por 40 en la ecuación (5) y obtenemos $z = 25$.

Luego, el hombre tiene 40 vacas, 45 caballos y 25 terneros.

Problema 5

Si al doble de la edad de A se suma la edad de B, se obtiene la edad de C aumentada en 32 años. Si al tercio de la edad de B se suma el doble de la de C, se obtiene la de A aumentada en 9 años, y el tercio de la suma de las edades de A y B es un año menos que la edad de C. Hallar las edades de A, B y C.

Solución

Sean x la edad de A, y la edad de B y z la edad de C.

Planteamos el siguiente sistema, de acuerdo con las condiciones del problema:

$$\begin{cases} 2x + y = z + 32 & (1) \\ \dfrac{1}{3}y + 2z = x + 9 & (2) \\ \dfrac{1}{3}(x+y) + 1 = z & (3) \end{cases}$$

Reemplazando el valor de z de la ecuación (3) en la ecuación (1) y simplificando tenemos

$$\begin{aligned} 2x + y &= \frac{1}{3}(x+y) + 1 + 32 \\ 6x + 3y &= x + y + 99 \\ 5x + 2y &= 99 \qquad\qquad\qquad (4) \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de z de la ecuación (3) en la ecuación (2) y simplificando tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}y + 2\left(\frac{1}{3}(x+y) + 1\right) &= x + 9 \\ \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + 2 &= x + 9 \\ y + 2x + 2y + 6 &= 3x + 27 \end{aligned}$$

$$3y - x = 21 \qquad (5)$$

Tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones en dos variables:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 99 & (4) \\ -x + 3y = 21 & (5) \end{cases}$$

Despejando x de la ecuación (5) tenemos

$$x = 3y - 21 \qquad (6)$$

Sustituyendo x por $3y - 21$ en (4) obtenemos $5(3y-21) + 2y = 99$.

Resolvemos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 15y - 105 + 2y &= 99 \\ 17y &= 204 \end{aligned}$$

$$y = 12.$$

Sustituimos y en (6) y obtenemos $x = 15$.

Reemplazamos los valores de x y y en la ecuación (3) y obtenemos $z = 10$.

Luego, A tiene 15 años, B tiene 12 años y C tiene 10 años.

Como ejercicio, verificar que se cumplen las condiciones del problema.

Problemas propuestos

1. Entre A, B y C tienen 140.000 pesos. C tiene la mitad de lo que tiene A y A 10.000 pesos más que B. ¿Cuánto tiene cada uno?
2. La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180 grados. El mayor excede al menor en 35 y el menor excede en 20 a la diferencia entre el mayor y el mediano. Hallar los ángulos.
3. Una asociación recreativa gastó 3.025.000 pesos en la compra de 650 artículos para luego vender en una fiesta. Los precios de compra fueron: ramos de flores a 7.500 pesos, recordatorios a 500 pesos y banderines a 6.000 pesos. Después de vender todos los artículos, menos 10 ramos y 25 recordatorios, se tuvo un ingreso de 4.087.500 pesos. Los precios de venta fueron: ramos de flores a 10.000 pesos, recordatorios a 2.500 pesos y banderines a 7.500 pesos. ¿Cuántos artículos de cada clase se compraron inicialmente?

Respuestas

1. A tiene 60.000 pesos, B tiene 50.000 pesos y C tiene 30.000 pesos.
2. 80, 55 y 45.
3. 150 ramos, 200 recordatorios y 300 banderines.

Lección 42

Máximo común divisor - *m.c.d.*

En esta lección aprenderemos el concepto de máximo común divisor para polinomios.

Iniciemos recordando el concepto de máximo común divisor ($m.c.d.$) para enteros.

En los enteros la palabra **divisor** se emplea como sinónimo de **factor**. Así que, un entero b, $b \neq 0$, es un **divisor** de un entero a si hay otro entero c tal que

$$a = b \cdot c$$

o, en otras palabras, si la división $a \div b$ es exacta.

Un entero b, $b \neq 0$, es un **divisor común** de dos o más enteros si b es un divisor (o factor) de cada uno de ellos.

Ejemplo 42.1

Los divisores (o factores) de 12 son ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 y ± 12.

Los divisores (o factores) de 18 son ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, ± 9 y ± 18.

Los divisores (o factores) comunes de 12 y 18 son ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.

Observemos que el mayor de los divisores comunes de 12 y 18 es 6 y que todos los divisores comunes de 12 y 18 son divisores de 6.

En general, el mayor divisor común de dos o más enteros se llama **máximo común divisor** de esos enteros y lo abreviamos ***m.c.d.***.

El $m.c.d.$ de dos o más enteros es, también, aquel divisor común positivo con la propiedad de que cualquier otro divisor común de ellos, es divisor de él.

Luego, en el ejemplo anterior, el $m.c.d.$ de 12 y 18 es 6.

El $m.c.d.$ de dos o más enteros se obtiene, después de descomponerlos en factores primos, como el producto de los **factores primos comunes**, cada uno elevado al **menor exponente** con el que aparezca.

Ejemplo 42.2

Hallar el $m.c.d.$ de 60 y 252.

Solución

Descomponemos 60 y 252 en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad\qquad 252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Los factores primos comunes son 2 y 3; 2 aparece con exponente 2 en ambos casos y el menor exponente del factor 3 es 1. Luego, el $m.c.d.$ es

$$2^2 \cdot 3 = 12.$$

Observando las factorizaciones de 60 y 252 vemos que cualquiera de los divisores comunes de 60 y 252 es un divisor del $m.c.d.$ hallado.

Consideremos ahora el concepto de $m.c.d.$ para polinomios.

Al igual que en los enteros, en los polinomios la palabra **divisor** es sinónimo de **factor**:

Un polinomio $b \neq 0$ es un **divisor** de un polinomio a si la división $a \div b$ es exacta.

Un polinomio $b \neq 0$ es un **divisor común** de dos o más polinomios si b es un divisor de cada uno de ellos.

Dados dos o más polinomios, se llama **máximo común divisor** (***m.c.d.***) de esos polinomios a un divisor común de ellos con la propiedad de que cualquier otro divisor común es divisor de él.

De manera similar a lo que ocurre en los enteros, el $m.c.d.$ de dos o más polinomios se obtiene, después de factorizarlos completamente, como el producto de los **factores comunes** con su **menor exponente**.

Ejemplo 42.3

Hallar el $m.c.d.$ de los polinomios dados en cada uno de los siguientes numerales.

1. $12x^2y^3z \;\;,\;\; 18xy^2$.
2. $m^3 + n^3 \;\;,\;\; 3am + 3an$.
3. $8x^3 + y^3 \;\;,\;\; 4ax^2 - ay^2$.
4. $2x^3 - 2x^2 \;\;,\;\; 3x^2 - 3x \;\;,\;\; 4x^3 - 4x^2$.
5. $x^2 - 2x - 8 \;\;,\;\; x^2 - x - 12 \;\;,\;\; x^3 - 9x^2 + 20x$.
6. $x^3 + 27 \;\;,\;\; 2x^2 - 6x + 18 \;\;,\;\; x^4 - 3x^3 + 9x^2$.

Solución

1. $12x^2y^3z = 2^2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot z$

   $18xy^2 = 2 \cdot 3^2 \cdot x \cdot y^2.$

   Los factores comunes son 2, 3, x, y. El menor exponente con que aparece 2 es 1, para 3 es 1, para x es 1 y para y es 2. Luego, el *m.c.d.* es $2 \cdot 3 \cdot x \cdot y^2$, es decir, $6xy^2$.

   Observando las factorizaciones de $12x^2y^3z$ y $18xy^2$ vemos que cualquier divisor común de ellos es un divisor del *m.c.d.* hallado.

2. Factorizamos los dos polinomios:

$$\begin{aligned} m^3 + n^3 &= (m+n)\left(m^2 - mn + n^2\right) \\ 3am + 3an &= 3a\,(m+n)\,. \end{aligned}$$

   El único factor común es $m+n$ y el menor exponente con que aparece es 1, por tanto el *m.c.d.* es $m+n$.

3. Factorizamos los dos polinomios:

$$\begin{aligned} 8x^3 + y^3 &= (2x+y)\left(4x^2 - 2xy + y^2\right) \\ 4ax^2 - ay^2 &= a\left(4x^2 - y^2\right) \\ &= a\,(2x+y)\,(2x-y)\,. \end{aligned}$$

   $2x+y$ es el único factor común y el menor exponente con que aparece es 1. Así, el *m.c.d.* es $2x+y$.

4. Factorizamos los tres polinomios:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 2x^2 &= 2x^2\,(x-1) \\ 3x^2 - 3x &= 3x\,(x-1) \\ 4x^3 - 4x^2 &= 4x^2\,(x-1)\,. \end{aligned}$$

   Los factores comunes son x y $x-1$ y el menor exponente con que aparecen ambos es 1. Por tanto, el *m.c.d.* es $x\,(x-1)$.

5. Factorizamos los polinomios:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 8 &= (x-4)\,(x+2) \\ x^2 - x - 12 &= (x-4)\,(x+3) \\ x^3 - 9x^2 + 20x &= x\left(x^2 - 9x + 20\right) = x\,(x-5)\,(x-4)\,. \end{aligned}$$

   El único factor común es $x-4$, con exponente 1 en todos los casos. Por tanto él es el *m.c.d.*

6. Al factorizar cada polinomio tenemos:

$$\begin{aligned} x^3+27 &= (x+3)\left(x^2-3x+9\right) \\ 2x^2-6x+18 &= 2\left(x^2-3x+9\right) \\ x^4-3x^3+9x^2 &= x^2\left(x^2-3x+9\right). \end{aligned}$$

Entonces el $m.c.d.$ es x^2-3x+9.

Ejemplo 42.4

Hallar el $m.c.d$ de los polinomios dados en cada uno de los siguientes numerales.

1. $3x^2+3x-60 \;\;,\;\; 6x^2-18x-24$
2. $x^4-9x^2 \;\;,\;\; x^4-5x^3+6x^2 \;\;,\;\; x^4-6x^3+9x^2$
3. $(x^2-1)^2 \;\;,\;\; x^2-4x-5 \;\;,\;\; x^4-1$
4. $54x^3+250 \;\;,\;\; 18ax^2-50a \;\;,\;\; 50+60x+18x^2$
5. $3x^2-x \;\;,\;\; 27x^3-1 \;\;,\;\; 9x^2-6x+1 \;\;,\;\; 3ax-a+6x-2$

Solución

1. Factorizamos los dos polinomios:

$$\begin{aligned} 3x^2+3x-60 &= 3(x^2+x-20) = 3(x+5)(x-4) \\ 6x^2-18x-24 &= 6(x^2-3x-4) = 2\cdot 3(x-4)(x+1). \end{aligned}$$

Los factores comunes son 3 y $x-4$. El menor exponente de cada uno de ellos es 1. Luego, el $m.c.d.$ es $3(x-4)$.

2. Factorizamos los tres polinomios:

$$\begin{aligned} x^4-9x^2 &= x^2(x^2-9) = x^2(x+3)(x-3) \\ x^4-5x^3+6x^2 &= x^2(x^2-5x+6) = x^2(x-3)(x-2) \\ x^4-6x^3+9x^2 &= x^2(x^2-6x+9) = x^2(x-3)^2. \end{aligned}$$

Los factores comunes son x y $x-3$. El menor exponente de x es 2 y el menor exponente para $x-3$ es 1. Por tanto, el $m.c.d.$ es $x^2(x-3)$.

3. Factorizamos los polinomios:

$$\begin{aligned} (x^2-1)^2 &= [(x+1)(x-1)]^2 = (x+1)^2(x-1)^2 \\ x^2-4x-5 &= (x-5)(x+1) \\ x^4-1 &= (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1). \end{aligned}$$

El único factor común es $x+1$ y el menor exponente con el que aparece es 1. Por tanto, el $m.c.d$ es $x+1$.

4. Factorizamos los tres polinomios:

$$\begin{aligned}54x^3+250 &= 2(27x^3+125) = 2(3x+5)(9x^2-15x+25)\\ 18ax^2-50a &= 2a(9x^2-25) = 2a(3x+5)(3x-5)\\ 50+60x+18x^2 &= 2(25+30x+9x^2) = 2(5+3x)^2.\end{aligned}$$

   Los factores comunes son 2 y $3x+5$ y ambos aparecen con 1 como menor exponente. Luego, el *m.c.d.* es $2(3x+5)$.

5. Factorizamos los cuatro polinomios:

$$\begin{aligned}3x^2-x &= x(3x-1)\\ 27x^3-1 &= (3x-1)(9x^2+3x+1)\\ 9x^2-6x+1 &= (3x-1)^2\\ 3ax-a+6x-2 &= a(3x-1)+2(3x-1) = (3x-1)(a+2).\end{aligned}$$

   El único factor común es $3x-1$ y el menor exponente con el que aparece es 1. Por tanto, éste es el *m.c.d.*.

Ejercicios propuestos

En cada numeral, hallar el *m.c.d.* de los polinomios dados.

1. $2ax^2+4ax \;\; , \; x^3-x^2-6x.$
2. $4a^2+8a-12 \;\; , \;\; 2a^2-6a+4 \;\; , \;\; 6a^2+18a-24.$
3. $3a^2m^2+6a^2m-45a^2 \;\; , \;\; 6am^2x+24amx-30ax.$
4. $16a^3x+54x \;\; , \;\; 12a^2x^2-42ax^2-90x^2 \;\; , \;\; 32a^3x+24a^2x-36ax \;\; , \;\; 32a^4x-144a^2x+162x.$

Respuestas

1. $x(x+2)$.
2. $2(a-1)$.
3. $3a(m+5)$.
4. $2x(2a+3)$.

Lección 43

Mínimo común múltiplo - *M.C.M.*

En esta lección aprenderemos el concepto de mínimo común múltiplo de dos o más polinomios y cómo encontrarlo. Para ello, vamos a utilizar una herramienta muy necesaria que es la factorización de polinomios. Se presentarán una serie de ejercicios resueltos con el procedimiento y finalmente otros ejercicios , sin resolver, para que el lector practique y adquiera la suficiente agilidad en la búsqueda de las soluciones.

Empecemos con los conceptos de múltiplo, múltiplo común y mínimo común múltiplo para números enteros.

Por ejemplo, sabemos que los múltiplos positivos de 2 son los enteros

$$2 = 1 \cdot 2 \quad , \quad 4 = 2 \cdot 2 \quad , \quad 6 = 3 \cdot 2 \quad , \quad 8 = 4 \cdot 2 \quad , \quad \cdots$$

los cuales son también los enteros positivos que tienen a 2 como divisor o factor.

En general, si a y b son números enteros, $b \neq 0$

$\boxed{a \text{ es } \textbf{múltiplo} \text{ de } b \text{ significa que } b \text{ es divisor o factor de } a.}$

Un entero a es un **múltiplo común** de dos o más enteros si a es múltiplo de cada uno de ellos.

Ejemplo 43.1

Los múltiplos de 12 son 0, ± 12, ± 24, $\boldsymbol{\pm 36}$, ± 48, ± 60, $\boldsymbol{\pm 72}$, ...

Los múltiplos de 18 son 0, ± 18, $\boldsymbol{\pm 36}$, ± 54, $\boldsymbol{\pm 72}$, ± 90, ...

Los múltiplos comunes de 12 y 18 son 0, ± 36, ± 72, ...

En el ejemplo anterior, el menor de los múltiplos comunes positivos de 12 y 18, es 36.

Podemos ver que todo múltiplo común de 12 y 18 es múltiplo de 36.

En general, el menor múltiplo común positivo de dos o más enteros se llama **mínimo común múltiplo** de esos enteros y lo abreviamos ***M.C.M.***.

Dicho *M.C.M.* es también aquel múltiplo común positivo con la propiedad de que cualquier otro múltiplo común es múltiplo de él.

Luego, en el ejemplo anterior, el *M.C.M.* de 12 y 18 es 36.

El $M.C.M.$ de dos o más enteros se obtiene, despúes de descomponerlos en factores primos, como el producto de los **factores primos comunes y no comunes**, cada uno de ellos elevado al **mayor exponente** con que aparece.

Ejemplo 43.2

Hallar el $M.C.M.$ de 18 y 40.

Solución

$$18 = 2 \cdot 3^2 \quad , \quad 40 = 2^3 \cdot 5.$$

Los factores primos comunes y no comunes son 2, 3 y 5. El mayor exponente con que aparece 2 es 3, para 3 es 2 y para 5 es 1. Luego, el $M.C.M.$ es

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360.$$

Observando las factorizaciones de 18 y 40 vemos que cualquier múltiplo común de 18 y 40 debe tener entre sus factores a 2^3, 3^2 y 5 y por tanto es un múltiplo del $M.C.M.$ hallado.

Consideremos ahora los conceptos de múltiplo, múltiplo común y mínimo común múltiplo para polinomios.

Por ejemplo, el polinomio $x^3 + 5x^2$ es múltiplo del polinomio x^2 porque

$$x^3 + 5x^2 = x^2\,(x + 5)\,.$$

En general, un polinomio a es un **múltiplo** de un polinomio b, $b \neq 0$, si hay otro polinomio c tal que

$$a = b \cdot c$$

es decir, si b es un divisor o factor de a. Así,

$$\boxed{a \text{ es múltiplo de } b \text{ significa que } b \text{ es un divisor o factor de } a.}$$

Un polinomio a es un **múltiplo común** de dos o más polinomios, si a es un múltiplo de cada uno de ellos.

Dados dos o más polinomios, se llama **mínimo común múltiplo** (***M.C.M.***) de esos polinomios a un múltiplo común de ellos con la propiedad de que cualquier otro múltiplo común, es un múltiplo de él.

De manera similar a lo que ocurre en los enteros, el $M.C.M.$ de dos o más polinomios se obtiene, después de factorizarlos completamente, como el producto de los **factores comunes y no comunes**, cada uno con su **mayor exponente**.

Ejemplo 43.3

Hallar el $M.C.M.$ de los polinomios dados en los siguientes numerales.

1. $12x^2y^3z \;\;,\;\; 18xy^2$.

2. $2x - 2y \quad , \quad 3x + 3y \quad , \quad x^2 - 2xy + y^2.$

3. $x^2 - 2xy + y^2 \quad , \quad x^2 + 2xy + y^2 \quad , \quad x^2 - y^2 \quad , \quad x^2 - 3xy + 2y^2 \quad , \quad 2x^2 + 3xy + y^2.$

Solución

1. $12x^2y^3z = 2^2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot z$

   $18xy^2 = 2 \cdot 3^2 \cdot x \cdot y^2.$

   Los factores comunes y no comunes son 2, 3, x, y, z. El mayor exponente para 2 es 2, para 3 es 2, para x es 2, para y es 3 y para z es 1. Luego, el $M.C.M.$ es $2^2 \cdot 3^2 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot z = 36x^2y^3z.$

2. Factorizamos los polinomios:

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 2(x-y) \\ 3x + 3y &= 3(x+y) \\ x^2 - 2xy + y^2 &= (x-y)^2 . \end{aligned}$$

   Los factores encontrados son 2, 3, $x - y$ y $x + y$. El $M.C.M.$ es el producto de éstos, cada uno de ellos con el mayor exponente

$$(2)(3)(x-y)^2(x+y) = 6(x-y)^2(x+y).$$

3. Factorizamos los polinomios:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 &= (x-y)^2 \\ x^2 + 2xy + y^2 &= (x+y)^2 \\ x^2 - y^2 &= (x+y)(x-y) \\ x^2 - 3xy + 2y^2 &= (x-2y)(x-y) \\ 2x^2 + 3xy + y^2 &= (2x+y)(x+y). \end{aligned}$$

   Los factores son $x - y$, $x + y$, $2x + y$ y $x - 2y$. Para $x - y$ y $x + y$ el mayor exponente es 2, mientras que para $x - 2y$ y $2x + y$ el mayor exponente es 1. Por tanto, el $M.C.M.$ es

$$(x-y)^2(x+y)^2(2x+y)(x-2y).$$

Ejemplo 43.4

En cada numeral, hallar el $M.C.M.$ de los polinomios dados.

1. $x^2 - 25 \quad , \quad x^3 - 125 \quad , \quad 2x + 10.$

2. $6b^2x^2 - 6b^2x^3 \quad , \quad 3a^2x - 3a^2x^2 \quad , \quad 1 - x^4.$

3. $x^3 - 9x + x^2 - 9 \quad , \quad x^4 - 10x^2 + 9 \quad , \quad x^2 + 4x + 3 \quad , \quad x^2 - 4x + 3.$

Solución

1. Factorizamos los polinomios:

$$\begin{aligned} x^2-25 &= (x+5)(x-5) \\ x^3-125 &= (x-5)\left(x^2+5x+25\right) \\ 2x+10 &= 2(x+5). \end{aligned}$$

   El $M.C.M.$ es $2(x+5)(x-5)(x^2+5x+25)$.

2. Factorizamos los polinomios:

$$\begin{aligned} 6b^2x^2-6b^2x^3 &= 6b^2x^2(1-x) = 2\cdot 3b^2x^3(1-x). \\ 3a^2x-3a^2x^2 &= 3a^2x(1-x). \\ 1-x^4 &= \left(1+x^2\right)\left(1-x^2\right) = \left(1+x^2\right)(1+x)(1-x). \end{aligned}$$

   El $M.C.M.$ es $6a^2b^2x^2(1+x^2)(1+x)(1-x)$.

3. Factorizamos los polinomios:

$$\begin{aligned} x^3-9x+x^2-9 &= x^3+x^2-9x-9 \\ &= x^2(x+1)-9(x+1) \\ &= (x+1)\left(x^2-9\right) \\ &= (x+1)(x+3)(x-3). \\ x^4-10x^2+9 &= \left(x^2-1\right)\left(x^2-9\right) \\ &= (x+1)(x-1)(x+3)(x-3). \\ x^2+4x+3 &= (x+3)(x+1). \\ x^2-4x+3 &= (x-3)(x-1). \end{aligned}$$

   El $M.C.M.$ es $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$.

Ejemplo 43.5

En cada numeral, hallar el $M.C.M.$ de los polinomios.

1. $3a^2m^2+6a^2m-45a^2$ y $6am^2x+24amx-30ax$.
2. $2a^2+2a$, $3a^2-3a$ y a^4-a^2.
3. $2(3n-2)^2$, $135n^3-40$ y $12n-8$.
4. $18a^3+3a^2b-6ab^2$, $15a^3+22a^2b+8ab^2$ y $60a^3+18a^2b-24ab^2$.

Solución

1. Factorizamos los polinomios:

$$\begin{aligned} 3a^2m^2+6a^2m-45a^2 &= 3a^2\left(m^2+2m-15\right) = 3a^2(m+5)(m-3). \\ 6am^2x+24amx-30ax &= 6ax\left(m^2+4m-5\right) = 2\cdot 3ax(m+5)(m-1). \end{aligned}$$

El $M.C.M.$ es $6a^2x\,(m+5)\,(m-3)\,(m-1)$.

2. Factorizamos los polinomios:

$$\begin{aligned} 2a^2+2a &= 2a\,(a+1)\,. \\ 3a^2-3a &= 3a\,(a-1)\,. \\ a^4-a^2 &= a^2\left(a^2-1\right) = a^2\,(a+1)\,(a-1)\,. \end{aligned}$$

El $M.C.M.$ es $6a^2\,(a+1)\,(a-1)\,.$

3. Factorizamos los polinomios:

$$\begin{aligned} 2\,(3n-2)^2 &= 2\,(3n-2)^2\,. \\ 135n^3-40 &= 5\left(27n^3-8\right) = 5\,(3n-2)\left(9n^2+6n+4\right). \\ 12n-8 &= 4\,(3n-2) = 2^2(3n-2). \end{aligned}$$

El $M.C.M.$ es$2^2\cdot 5\,(3n-2)^2\,(9n^2+6n+4) = 20\,(3n-2)^2\,(9n^2+6n+4)\,.$

4. Factorizamos los polinomios:

$$\begin{aligned} 18a^3+3a^2b-6ab^2 &= 3a\left(6a^2+ab-2b^2\right) = 3a\,(3a+2b)\,(2a-b)\,. \\ 15a^3+22a^2b+8ab^2 &= a\left(15a^2+22ab+8b^2\right) = a\,(5a+4b)\,(3a+2b)\,. \\ 60a^3+18a^2b-24ab^2 &= 6a\left(10a^2+3ab-4b^2\right) = 2\cdot 3a\,(5a+4b)\,(2a-b)\,. \end{aligned}$$

El $M.C.M.$ es $6a\,(3a+2b)\,(2a-b)\,(5a+4b)$.

Ejercicios propuestos

En cada numeral, encontrar el mínimo común múltiplo de los polinomios dados.

1. m^3-27n^3 , m^2-9n^2 , $m^2-6mn+9n^2$, $m^2+3mn+9n^2$.
2. $1-a^3$, $1-a$, $1-a^2$, $1-2a+a^2$.
3. $12x^2+5xy-2y^2$, $15x^2+13xy+2y^2$, $20x^2-xy-y^2$.
4. $16-x^4$, $16+8x^2+x^4$, $16-8x^2+x^4$.

Respuestas

1. $(m-3n)^2(m+3n)(m^2+3mn+9n^2)$.
2. $(1+a)(1-a)^2(1+a+a^2)$.
3. $(4x-y)(3x+2y)(5x+y)$.
4. $(4+x^2)^2(2+x)^2(2-x)^2$.

Lección 44

Fracciones

En esta lección aprenderemos qué es una fracción algebraica y cuáles son sus partes. Analizaremos qué pasa en una fracción cuando se realizan operaciones sobre sus partes o cuando se cambian los signos. Finalizamos con la transformación de fracciones en fracciones equivalentes para simplificarlas. Ilustraremos con ejemplos resueltos las propiedades de las fracciones y la simplificación de fracciones algebraicas sencillas.

Una expresión de la forma $\frac{a}{b}$ con a y b expresiones algebraicas y $b \neq 0$, se llama **fracción algebraica**.

Las siguientes son fracciones algebraicas:

$$\frac{4z^2}{z-1}\ ,\ \frac{xy^5-2}{x^3+2y}\ ,\ \frac{3x+1}{2x^4+1}.$$

En una fracción algebraica el dividendo se llama **numerador** de la fracción y el divisor **denominador** de la fracción. El numerador y el denominador son los **términos** de la fracción.

Propiedades de las fracciones

1. Si el numerador de una fracción se multiplica o divide por una expresión diferente de cero, la fracción queda multiplicada en el primer caso, y dividida en el segundo, por la misma expresión. Es decir, dada la fracción $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, si $c \neq 0$, entonces

$$\frac{a \cdot \boldsymbol{c}}{b} = \boldsymbol{c} \cdot \frac{a}{b} \quad \text{y}$$

$$\frac{\frac{a}{\boldsymbol{c}}}{b} = \frac{\frac{a}{b}}{\boldsymbol{c}}, \quad \text{con } c \neq 0.$$

2. Si el denominador de una fracción se multiplica o divide por una expresión diferente de 0, la fracción queda dividida en el primer caso, y multiplicada en el segundo, por la misma expresión. Es decir, dada la fracción $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, si $c \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b \cdot \boldsymbol{c}} = \frac{\frac{a}{b}}{\boldsymbol{c}} \quad \text{y}$$

$$\frac{a}{\frac{b}{\boldsymbol{c}}} = \boldsymbol{c} \cdot \frac{a}{b}.$$

3. Si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican o dividen por una misma expresión diferente de cero, la fracción no se altera. Es decir, dada la fracción $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, si $c \neq 0$, entonces

$$\frac{a \cdot \boldsymbol{c}}{b \cdot \boldsymbol{c}} = \frac{a}{b} \quad \text{y}$$

$$\frac{\frac{a}{\boldsymbol{c}}}{\frac{b}{\boldsymbol{c}}} = \frac{a}{b}.$$

4. Si en una fracción cambiamos el signo del numerador y el del denominador, la fracción no se altera. Es decir, dada la fracción $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} = \frac{\boldsymbol{-}a}{\boldsymbol{-}b}.$$

5. Si en una fracción cambiamos el signo del numerador y el de la fracción, la fracción no se altera. Es decir, dada la fracción $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} = \boldsymbol{-}\frac{\boldsymbol{-}a}{b}.$$

6. Si en una fracción cambiamos el signo del denominador y el de la fracción, la fracción no se altera. Es decir, dada la fracción $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} = \boldsymbol{-}\frac{a}{\boldsymbol{-}b}.$$

Ejemplo 44.1

1. Sea la fracción $\frac{4x+3}{2x-5}$, con $x \neq \frac{5}{2}$, ya que este valor hace cero el denominador.

   Como $2 \neq 0$, entonces

$$\frac{\mathbf{2}\,(4x+3)}{2x-5} = \mathbf{2} \cdot \frac{4x+3}{2x-5}.$$

   Multiplicar el numerador de la fracción por 2 es equivalente a multiplicar la fracción por 2.

$$\frac{\frac{4x+3}{\mathbf{2}}}{2x-5} = \frac{\frac{4x+3}{2x-5}}{\mathbf{2}}.$$

   Al dividir el numerador de la fracción entre 2 estamos dividiendo la fracción entre 2.

2. Dada la fracción $\dfrac{x-3}{2x^2+4}$, como $3 \neq 0$, entonces

$$\frac{(x-3)}{\mathbf{3}\left(2x^2+4\right)} = \frac{\dfrac{x-3}{2x^2+4}}{\mathbf{3}}.$$

Multiplicar el denominador por 3 es equivalente a dividir la fracción entre 3.

$$\frac{\dfrac{x-3}{2x^2+4}}{\mathbf{3}} = \mathbf{3} \cdot \frac{x-3}{2x^2+4}.$$

Al dividir el denominador entre 3 estamos multiplicando la fracción por 3.

3. Dada la fracción $\dfrac{y-2}{5y-10}$, con $y \neq 2$, como $4 \neq 0$, entonces

$$\frac{\mathbf{4}\,(y-2)}{\mathbf{4}\,(5y-10)} = \frac{y-2}{5y-10}.$$

Al multiplicar numerador y denominador por 4, la fracción no se altera.

$$\frac{\dfrac{y-2}{\mathbf{4}}}{\dfrac{5y-10}{\mathbf{4}}} = \frac{y-2}{5y-10}.$$

Si dividimos numerador y denominador entre 4, la fracción no se altera.

4. Dada la fracción $\dfrac{4-y}{3-x}$, con $x \neq -3$,

$$\frac{4-y}{3-x} = \frac{-(4-y)}{-(3-x)} = \frac{y-4}{x-3}.$$

Cuando cambiamos el signo del numerador y el del denominador, la fracción no se altera.

5. Dada la fracción $\dfrac{-x}{2y}$, con $y \neq 0$,

$$\frac{-x}{2y} = -\frac{x}{2y}.$$

Al cambiar el signo del numerador y el de la fracción, ésta no se altera.

6. Dada la fracción $\dfrac{x-1}{1-x}$, con $x \neq 1$,

$$\frac{x-1}{1-x} = -\frac{x-1}{-(1-x)} = -\frac{x-1}{x-1} = -1.$$

Cuando cambiamos el signo del denominador y el de la fracción, ésta nos se altera.

Simplificación de fracciones

Decimos que dos fracciones son **equivalentes** si una se obtiene de la otra a partir de operaciones sobre sus términos, sin alterar la fracción.

Simplificar una fracción es convertirla en una fracción equivalente cuyos términos sean primos entre sí, es decir, los factores comunes del numerador y denominador han sido cancelados, dividiendo numerador y denominador por el *m.c.d.* de ambos.

Ejemplo 44.2

Simplificar las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{8m^4n^3x^2}{24mn^2x^2}$.
2. $\dfrac{a^5b^7}{3a^8b^9c}$.
3. $\dfrac{9x^2y^3}{24a^2x^3y^4}$.
4. $\dfrac{21mn^3x^6}{28m^4n^2x^2}$.

Solución

1. Como el *m.c.d.* del numerador y el denominador es $8mn^2x^2$, al dividir numerador y denominador de la fracción entre $8mn^2x^2$, tenemos
$$\frac{8m^4n^3x^2}{24mn^2x^2} = \frac{m^3n}{3}.$$
Es decir, cancelamos el factor común $8mn^2x^2$, en el numerador y en el denominador.
2. Como el *m.c.d.* del numerador y el denominador es a^5b^7, entonces
$$\frac{a^5b^7}{3a^8b^9c} = \frac{1}{3a^3b^2c}.$$
Cancelamos el factor común a^5b^7, en el numerador y en el denominador.
3. Dividimos numerador y denominador entre $3x^2y^3$, que es el *m.c.d.* de ambos, obteniendo
$$\frac{9x^2y^3}{24a^2x^3y^4} = \frac{3}{8a^2xy}.$$
4. Dividimos numerador y denominador entre $7mn^2x^2$, que es el *m.c.d.* de ambos, obteniendo
$$\frac{21mn^3x^6}{28m^4n^2x^2} = \frac{3nx^4}{4m^3}.$$

Ejercicios propuestos

I. Justificar en cada numeral por qué es válida la igualdad entre las fracciones.

1. $\dfrac{3\,(x+4)}{5-x} = 3 \cdot \dfrac{x+4}{5-x}$, con $x \neq 5$.
2. $\dfrac{3-x^2}{2x} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3-x^2}{x}$.
3. $\dfrac{2+x}{1-x^3} = -\dfrac{2+x}{x^3-1}$, con $x \neq 1$.
4. $\dfrac{x-x^2+3}{1-x} = \dfrac{x^2-x-3}{x-1}$, con $x \neq 1$.
5. $\dfrac{2-x^2}{x^2-2} = -1$.

II. Simplificar las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{2a}{8a^2b}$.
2. $\dfrac{6m^2n^3}{3m}$.
3. $\dfrac{12x^3y^5z^5}{32xy^2z}$.

Solución

I. 1. Porque al multiplicar el numerador de la fracción $\dfrac{x+4}{5-x}$ por 3, la fracción queda multiplicada por 3.

2. Porque al multiplicar el denominador de la fracción $\dfrac{3-x^2}{x}$ por 2, la fracción queda multiplicada por $\dfrac{1}{2}$.

3. Porque al cambiar el signo de la fracción y el del denominador, la fracción no se altera.

4. Porque al cambiar el signo del numerador y el del denominador, la fracción no se altera.

5. Porque al cambiar el signo del numerador y el de la fracción, se obtiene una fracción equivalente.

II. 1. $\dfrac{1}{4ab}$.

2. $2mn^3$.

3. $\dfrac{3x^2y^3z^4}{8}$.

Lección 45

Simplificación de fracciones

En esta lección trabajaremos con fracciones para las cuales tanto el numerador como el denominador son polinomios. Para simplificarlas debemos factorizar numerador y denominador cuando sea posible y luego dividirlos por el *m.c.d.* de ambos para obtener una fracción irreducible. Ilustraremos con ejemplos resueltos la simplificación de fracciones cuyos numeradores y denominadores pueden factorizarse por los métodos aprendidos en las lecciones de factorización. Proponemos al final unos ejercicios para que el estudiante practique lo aprendido aquí.

Fracciones racionales

Si en una fracción algebraica el numerador y el denominador son polinomios, decimos que la fracción es una **fracción racional**. Por ejemplo,

$$\frac{5x^2}{x+2}\ ,\quad \frac{7x^3+2x^2-x+1}{4x^4+2x^2+1}$$

son fracciones racionales.

Simplificar una fracción racional es convertirla en una fracción equivalente cuyos términos sean primos entre sí, es decir, el numerador y el denominador no tienen factores comunes entre sí, distintos de 1.

Cuando los términos de una fracción son primos entre sí, decimos que la fracción es **irreducible** o que está reducida **a su mínima expresión.**

Para simplificar una fracción racional factorizamos el numerador y el denominador y los dividimos por el *m.c.d.* de ambos, o equivalentemente, cancelamos los factores comunes en el numerador y en el denominador aplicando la propiedad $\dfrac{ac}{bc}=\dfrac{a}{b}$.

Ejemplo 45.1

Simplificar las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$.
2. $\dfrac{1-x^2}{x^3-1}$.

3. $\dfrac{2x^3+6x^2-x-3}{x^3+3x^2+x+3}$.

4. $\dfrac{3x^2y+15xy}{x^2-25}$.

Solución

1. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1} = \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$ Factorizamos numerador y denominador

$= \dfrac{x-2}{x-1}$ Dividimos numerador y denominador entre $x+1$.

2. $\dfrac{1-x^2}{x^3-1} = \dfrac{(1+x)(1-x)}{(x-1)(x^2+x+1)}$ Factorizamos numerador y denominador

$= \dfrac{-(1+x)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$ Porque $1-x=-(x-1)$

$= \dfrac{-(1+x)}{x^2+x+1}$ Cancelamos el factor común $x-1$

$= -\dfrac{1+x}{x^2+x+1}$ Cambiamos el signo del numerador y el de la fracción.

3. $\dfrac{2x^3+6x^2-x-3}{x^3+3x^2+x+3} = \dfrac{2x^2(x+3)-(x+3)}{x^2(x+3)+(x+3)}$

$= \dfrac{(x+3)(2x^2-1)}{(x+3)(x^2+1)}$ Factorizamos numerador y denominador

$= \dfrac{2x^2-1}{x^2+1}$ Cancelamos el factor común $x+3$.

4. $\dfrac{3x^2y+15xy}{x^2-25} = \dfrac{3xy(x+5)}{(x+5)(x-5)}$ Factorizamos numerador y denominador

$= \dfrac{3xy}{x-5}$ Cancelamos el factor común $x+5$.

Ejemplo 45.2

Simplificar las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{9x^2-24x+16}{9x^4-16x^2}$.

2. $\dfrac{(x^2-x-2)(x^2-9)}{(x^2-2x-3)(x^2+x-6)}$.

3. $\dfrac{2x^2-22x+60}{75-3x^2}$.

4. $\dfrac{(x^2-1)(x^2-8x+16)}{(x^2-4x)(1-x^2)}$.

5. $\dfrac{\left(4n^2+4n-3\right)\left(n^2+7n-30\right)}{\left(2n^2-7n+3\right)\left(4n^2+12n+9\right)}$.

Solución

1. $$\begin{aligned}
\frac{9x^2-24x+16}{9x^4-16x^2} &= \frac{(3x-4)^2}{x^2\left(9x^2-16\right)} \\
&= \frac{(3x-4)^2}{x^2(3x+4)(3x-4)} && \text{Factorizamos numerador y denominador} \\
&= \frac{3x-4}{x^2(3x+4)} && \text{Dividimos numerador y denominador entre } 3x-4.
\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}
\frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-9\right)}{\left(x^2-2x-3\right)\left(x^2+x-6\right)} &= \frac{(x-2)(x+1)(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+1)(x+3)(x-2)} && \text{Factorizamos} \\
&= 1 && \text{Cancelamos factores comunes.}
\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}
\frac{2x^2-22x+60}{75-3x^2} &= \frac{2\left(x^2-11x+30\right)}{3\left(25-x^2\right)} \\
&= \frac{2(x-6)(x-5)}{3(5+x)(5-x)} && \text{Factorizamos} \\
&= \frac{-2(x-6)(5-x)}{3(5+x)(5-x)} && \text{Porque } x-5=-(5-x) \\
&= \frac{-2(x-6)}{3(5+x)} && \text{Cancelamos el factor común } 5-x \\
&= \frac{2(6-x)}{3(5+x)} && \text{Porque } -(x-6)=6-x.
\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}
\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-8x+16\right)}{\left(x^2-4x\right)\left(1-x^2\right)} &= \frac{(x+1)(x-1)(x-4)^2}{x(x-4)(1+x)(1-x)} \\
&= \frac{-(1-x)(x-4)}{x(1-x)} \\
&= \frac{-(x-4)}{x} \\
&= \frac{4-x}{x}.
\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}
\frac{\left(4n^2+4n-3\right)\left(n^2+7n-30\right)}{\left(2n^2-7n+3\right)\left(4n^2+12n+9\right)} &= \frac{(2n-1)(2n+3)(n-3)(n+10)}{(2n-1)(n-3)(2n+3)^2} \\
&= \frac{n+10}{2n+3}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 45.3

Simplificar las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{a^5 - a^3 - a^2 + 1}{a^5 - 2a^4 - 6a^3 + 8a^2 + 5a - 6}$.

2. $\dfrac{z^5 - z^3 + 8z^2 - 8}{z^4 + 5z^3 - 7z^2 - 41z - 30}$.

Solución

1. Factoricemos el numerador:

$$\begin{aligned} a^5 - a^3 - a^2 + 1 &= \left(a^5 - a^3\right) - \left(a^2 - 1\right) \\ &= a^3\left(a^2 - 1\right) - \left(a^2 - 1\right) \\ &= \left(a^2 - 1\right)\left(a^3 - 1\right) \\ &= (a+1)(a-1)(a-1)\left(a^2 + a + 1\right) \\ &= (a-1)^2 (a+1)\left(a^2 + a + 1\right). \end{aligned}$$

Para factorizar el denominador veamos si $a - 1$ ó $a + 1$ son factores del denominador.

Reemplazamos a por 1 en $a^5 - 2a^4 - 6a^3 + 8a^2 + 5a - 6$:

$(1)^5 - 2(1)^4 - 6(1)^3 + 8(1)^2 + 5(1) - 6 = 0$, entonces $a - 1$ si es factor.

Hagamos la división sintética:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & -2 & -6 & 8 & 5 & -6 & 1 \\ & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 & \\ \hline 1 & -1 & -7 & 1 & 6 & 0 & \end{array}$$

Entonces $a^5 - 2a^4 - 6a^3 + 8a^2 + 5a - 6 = (a-1)\left(a^4 - a^3 - 7a^2 + a + 6\right)$.

$a - 1$ es factor del cociente ya que $1^4 - 1^3 - 7(1)^2 + 1 + 6 = 0$.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -1 & -7 & 1 & 6 & 1 \\ & 1 & 0 & -7 & -6 & \\ \hline 1 & 0 & -7 & -6 & 0 & \end{array}$$

Luego, $a^5 - 2a^4 - 6a^3 + 8a^2 + 5a - 6 = (a-1)(a-1)\left(a^3 - 7a - 6\right) = (a-1)^2\left(a^3 - 7a - 6\right)$, y $a + 1$ es factor de $a^3 - 7a - 6$ ya que $(-1)^3 - 7(-1) - 6 = 0$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -7 & -6 & -1 \\ & -1 & 1 & 6 & \\ \hline 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} a^5 - 2a^4 - 6a^3 + 8a^2 + 5a - 6 &= (a-1)^2 (a+1)\left(a^2 - a - 6\right) \\ &= (a-1)^2 (a+1)(a-3)(a+2). \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{a^5-a^3-a^2+1}{a^5-2a^4-6a^3+8a^2+5a-6}=\frac{(a-1)^2(a+1)(a^2+a+1)}{(a-1)^2(a+1)(a-3)(a+2)}=\frac{a^2+a+1}{(a-3)(a+2)}.$$

2. Factorizamos el numerador:

$$\begin{aligned}z^5-z^3+8z^2-8&=z^3\left(z^2-1\right)+8\left(z^2-1\right)\\&=\left(z^2-1\right)\left(z^3+8\right)\\&=(z+1)(z-1)(z+2)\left(z^2-2z+4\right).\end{aligned}$$

Para factorizar el denominador consideremos los factores de 30 que son: ±1, ±2, ±3, ±5.

Si reemplazamos z por 1 en el denominador obtenemos un número distinto de cero, luego, $z-1$ no es factor del denominador. Reemplacemos z por -1 en $z^4+5z^3-7z^2-41z-30$ así:

$$(-1)^4+5(-1)^3-7(-1)^2-41(-1)-30=1-5-7+41-30=0,$$

entonces $z+1$ es factor del denominador.

Hagamos la división sintética:

$$\begin{array}{rrrrr|l}1 & 5 & -7 & -41 & -30 & \underline{-1}\\ & -1 & -4 & 11 & 30 & \\\hline 1 & 4 & -11 & -30 & 0 &\end{array}$$

Entonces, $z^4+5z^3-7z^2-41z-30=(z+1)(z^3+4z^2-11z-30)$.

Factoricemos $z^3+4z^2-11z-30$, usando los factores de 30 que son: ±1, ±2, ±3, ±5.

$z+2$ es factor de $z^3+4z^2-11z-30$. ¿Por qué?

Como

$$\begin{array}{rrrr|l}1 & 4 & -11 & -30 & \underline{-2}\\ & -2 & -4 & 30 & \\\hline 1 & 2 & -15 & 0 &\end{array}$$

entonces $z^3+4z^2-11z-30=(z+2)(z^2+2z-15)$.

Luego,

$$\begin{aligned}z^4+5z^3-7z^2-41z-30&=(z+1)\left(z^3+4z^2-11z-30\right)\\&=(z+1)(z+2)\left(z^2+2z-15\right)\\&=(z+1)(z+2)(z+5)(z-3).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{z^5-z^3+8z^2-8}{z^4+5z^3-7z^2-41z-30}&=\frac{(z+1)(z-1)(z+2)(z^2-2z+4)}{(z+1)(z+2)(z+5)(z-3)}\\&=\frac{(z-1)(z^2-2z+4)}{(z+5)(z-3)}.\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

Simplificar las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{xy}{3x^2y+3xy^2}$.
2. $\dfrac{3x^3+9x^2}{x^2+6x+9}$.
3. $\dfrac{a^2-4}{4-a^2}$.
4. $\dfrac{n+1-n^3-n^2}{n^3-n-2n^2+2}$.
5. $\dfrac{x^3-6x^2-x+30}{6+x-x^2}$.

Respuestas

1. $\dfrac{1}{3x+3y}$.
2. $\dfrac{3x^2}{x+3}$.
3. -1.
4. $\dfrac{n+1}{2-n}$.
5. $5-x$.

Lección 46

Producto de fracciones

En esta lección aprenderemos cómo multiplicar entre sí dos o más fracciones.

El producto de dos o más fracciones es el producto de los numeradores dividido entre el producto de los denominadores, es decir,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}.$$

Por ejemplo,

$$\frac{xy}{z} \cdot \frac{x^2y}{2z} = \frac{(xy)\left(x^2y\right)}{z\,(2z)} = \frac{x^3y^2}{2z^2}.$$

Por la conmutatividad de la multiplicación, podemos colocar los factores en el orden que convenga, como en el ejemplo siguiente:

$$\frac{3x\,(x+y)}{2\,(x-y)} \cdot \frac{3\,(x-2y)}{2y\,(2x-y)} \cdot \frac{5x}{4y} = \frac{(3x)\,(3)\,(5x)\,(x+y)\,(x-2y)}{(2)\,(2y)\,(4y)\,(x-y)\,(2x-y)} = \frac{45x^2\,(x+y)\,(x-2y)}{16y^2\,(x-y)\,(2x-y)}.$$

Para simplificar el producto de dos o más fracciones podemos proceder así:

1. Factorizamos completamente numeradores y denominadores de las fracciones que se van a multiplicar.
2. Simplificamos las fracciones resultantes, si es posible.
3. Multiplicamos entre sí los numeradores y los denominadores y simplificamos la fracción resultante.

Ejemplo 46.1

Realizar los productos indicados y simplificar la fracción resultante en cada caso:

1. $\dfrac{x^2y}{5} \cdot \dfrac{10a^3}{3m^2} \cdot \dfrac{9m}{x^3}.$
2. $\dfrac{2x^3}{7xy^2} \cdot \dfrac{3a^2}{15a^3} \cdot \dfrac{5x^2}{y}.$

Solución

1. $$\frac{x^2y}{5}\cdot\frac{10a^3}{3m^2}\cdot\frac{9m}{x^3}=\frac{x^2y\cdot 10a^3\cdot 9m}{5\cdot 3m^2\cdot x^3}$$ Multiplicamos entre sí los numeradores y los denominadores
$$=\frac{90x^2ya^3m}{15m^2x^3}$$ Realizamos operaciones en el numerador y en el denominador
$$=\frac{6a^3y}{mx}$$ Simplificamos la fracción resultante.

2. $$\frac{2x^3}{7xy^2}\cdot\frac{3a^2}{15a^3}\cdot\frac{5x^2}{y}=\frac{2x^2}{7y^2}\cdot\frac{1}{5a}\cdot\frac{5x^2}{y}$$ Simplificamos cada una de las fracciones
$$=\frac{2x^2\cdot\ 1\cdot 5x^2}{7y^2\cdot 5a\cdot y}$$ Multiplicamos entre sí los numeradores y los denominadores
$$=\frac{10x^4}{35ay^3}$$ Realizamos operaciones en el numerador y en el denominador
$$=\frac{2x^4}{7ay^3}$$ Simplificamos la fracción resultante.

Nota: En la práctica cuando estamos multiplicando fracciones, después de factorizar los numeradores y denominadores y antes de multiplicar numeradores y denominadores entre sí, podemos cancelar cada factor común que aparezca en un numerador y en un denominador sin importar si son o no de la misma fracción.

Ejemplo 46.2

En cada numeral, efectuar las operaciones indicadas y simplificar el resultado.

1. $\dfrac{x^2-4}{xy^2}.\dfrac{2xy}{x^2-4x+4}$.

2. $\dfrac{6x-12}{4xy+4x}.\dfrac{y^2-1}{2-3x+x^2}$.

3. $\dfrac{ax+ab+cx+bc}{a^2-x^2}\cdot\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2+(b+a)\,x+ab}$.

Solución

1. $$\begin{aligned}\frac{x^2-4}{xy^2}\cdot\frac{2xy}{x^2-4x+4}&=\frac{(x+2)\,(x-2)}{xy^2}\cdot\frac{2xy}{(x-2)^2}\\&=\frac{x+2}{y}\cdot\frac{2}{x-2}\\&=\frac{2\,(x+2)}{y\,(x-2)}.\end{aligned}$$

2. $$\frac{6x-12}{4xy+4x}\cdot\frac{y^2-1}{2-3x+x^2}=\frac{6\,(x-2)}{4x\,(y+1)}\cdot\frac{(y+1)\,(y-1)}{(x-2)\,(x-1)}$$
$$=\frac{3\,(y-1)}{2x\,(x-1)}.$$

3. $$\frac{ax+ab+cx+bc}{a^2-x^2}\cdot\frac{x^2-2ax+a^2}{x^2+(b+a)\,x+ab}=\frac{(a+c)\,(x+b)}{(a+x)\,(a-x)}\cdot\frac{(x-a)^2}{(x+a)\,(x+b)}$$
$$=-\frac{(a+c)\,(x-a)}{(x+a)^2}$$
$$=\frac{(a+c)\,(a-x)}{(x+a)^2}.$$

Ejemplo 46.3

Simplificar los productos indicados en cada numeral.

1. $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+3x-2}\cdot\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-1}\cdot\dfrac{3x^2+6x}{2x-4}.$
2. $\dfrac{a+2b}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{a-2b}{b-a}\cdot\dfrac{a+b}{4b^2-a^2}.$
3. $\dfrac{a^2+ab-6b^2}{a^2+4ab+3b^2}\cdot\dfrac{4a^2-4ab+b^2}{2a^2-5ab+2b^2}\cdot\dfrac{2a-b}{a+b}.$
4. $\dfrac{2x^2+x-3}{2x^2-x-3}\cdot\dfrac{6x^2-7x-3}{x^2+2x-3}\cdot\dfrac{x+3}{2x+3}.$

Solución

1. $$\frac{x^2-3x+2}{2x^2+3x-2}\cdot\frac{2x^2+5x-3}{x^2-1}\cdot\frac{3x^2+6x}{2x-4}=\frac{(x-2)\,(x-1)}{(2x-1)\,(x+2)}\cdot\frac{(2x-1)\,(x+3)}{(x+1)\,(x-1)}\cdot\frac{3x\,(x+2)}{2\,(x-2)}$$
$$=\frac{3x\,(x+3)}{2\,(x+1)}.$$

2. $$\frac{a+2b}{a^2-b^2}\cdot\frac{a-2b}{b-a}\cdot\frac{a+b}{4b^2-a^2}$$
$$=\frac{a+2b}{(a+b)\,(a-b)}\cdot\frac{a-2b}{b-a}\cdot\frac{a+b}{(2b+a)\,(2b-a)}$$
$$=\frac{a+2b}{(a+b)\,(a-b)}\cdot\frac{a-2b}{b-a}\cdot(-)\frac{a+b}{(2b+a)(a-2b)}\qquad \text{Porque } 2b-a=-(a-2b)$$
$$=-\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{b-a}$$
$$=\frac{1}{(a-b)^2}\qquad \text{Porque } b-a=-(a-b).$$

3. $$\frac{a^2+ab-6b^2}{a^2+4ab+3b^2}\cdot\frac{4a^2-4ab+b^2}{2a^2-5ab+2b^2}\cdot\frac{2a-b}{a+b}=\frac{(a+3b)\,(a-2b)}{(a+3b)\,(a+b)}\cdot\frac{(2a-b)^2}{(2a-b)\,(a-2b)}\cdot\frac{2a-b}{a+b}$$
$$=\frac{(2a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

4. $$\frac{2x^2+x-3}{2x^2-x-3}\cdot\frac{6x^2-7x-3}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x+3}{2x+3}=\frac{(2x+3)\,(x-1)}{(2x-3)\,(x+1)}\cdot\frac{(3x+1)\,(2x-3)}{(x+3)\,(x-1)}\cdot\frac{x+3}{2x+3}$$
$$=\frac{3x+1}{x+1}.$$

Ejercicios propuestos

Realizar las operaciones indicadas y simplificar el resultado.

1. $\dfrac{7a}{6m^2}\cdot\dfrac{3m}{10n^2}\cdot\dfrac{5n^4}{14ax}.$
2. $\dfrac{xy-2y^2}{x^2+xy}\cdot\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy}.$
3. $\dfrac{a^2+4ab+4b^2}{x^2+xy}\cdot\dfrac{2a+4b}{(a+2b)^3}.$
4. $\dfrac{x^2-3xy-10y^2}{x^2-2xy-8y^2}\cdot\dfrac{x^2-16y^2}{x^2+4xy}\cdot\dfrac{x^2-6xy}{x+2y}.$
5. $\dfrac{a^2+7a+10}{a^2-6a-7}\cdot\dfrac{a^2-3a-4}{a^2+2a-15}\cdot\dfrac{a^3-2a^2-3a}{a^2-2a-8}.$

Solución

1. $\dfrac{n^2}{8mx}.$
2. $\dfrac{xy+y^2}{x^2}.$
3. $\dfrac{2}{x(x+1)}.$
4. $\dfrac{x^2-11xy+30y^2}{x+2y}.$
5. $\dfrac{a^2+a}{a-7}.$

Lección 47

División de fracciones

En esta lección aprenderemos a dividir entre si dos o más fracciones expresando la operación de división como una multiplicación, invirtiendo el divisor, lo cual facilita la simplificación. Ilustramos con ejemplos dicha operación, los cuales complementamos con ejercicios de multiplicación y división combinados y finalmente se presentan los ejercicios propuestos para practicar lo aprendido.

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ fracciones con b, c y d distintos de cero. Consideremos la división $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$, que en forma de fracción se expresa como $\frac{a/b}{c/d}$.

Sabemos que si multiplicamos el dividendo a/b y el divisor c/d por una misma expresión diferente de cero, la fracción $\frac{a/b}{c/d}$ no varía. Por tanto,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \div \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \div (1) = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Así, para dividir dos fracciones multiplicamos el dividendo por el divisor invertido:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Ejemplo 47.1

En cada numeral, efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

1. $\dfrac{5m^2}{7n^3} \div \dfrac{10m^4}{14an^4}$.
2. $6a^2x^3 \div \dfrac{a^2x}{5}$.
3. $\dfrac{11x^2y^3}{7} \div 22y^4$.
4. $\dfrac{24x^3y^2}{5z^2} \div \dfrac{8x^2y^3}{15z^4}$.

Solución

1. $\dfrac{5m^2}{7n^3} \div \dfrac{10m^4}{14an^4} = \dfrac{5m^2}{7n^3} \cdot \dfrac{14an^4}{10m^4}$ Multiplicamos el dividendo por el divisor invertido

   $= \dfrac{an}{m^2}$ Simplificamos.

2. Como $6a^2x^3 = \dfrac{6a^2x^3}{1}$, entonces

   $6a^2x^3 \div \dfrac{a^2x}{5} = \dfrac{6a^2x^3}{1} \div \dfrac{a^2x}{5}$

   $= \dfrac{6a^2x^3}{1} \cdot \dfrac{5}{a^2x}$ Multiplicamos el dividendo por el divisor invertido

   $= 30x^2$ Simplificamos.

3. Como $22y^4 = \dfrac{22y^4}{1}$, entonces

   $\dfrac{11x^2y^3}{7} \div 22y^4 = \dfrac{11x^2y^3}{7} \div \dfrac{22y^4}{1}$

   $= \dfrac{11x^2y^3}{7} \cdot \dfrac{1}{22y^4}$ Multiplicamos el dividendo por el divisor invertido

   $= \dfrac{x^2}{14y}$ Simplificamos.

4. $\dfrac{24x^3y^2}{5z^2} \div \dfrac{8x^2y^3}{15z^4} = \dfrac{24x^3y^2}{5z^2} \cdot \dfrac{15z^4}{8x^2y^3}$ Multiplicamos el dividendo por el divisor invertido

   $= \dfrac{9xz^2}{y}$ Simplificamos.

Ejemplo 47.2

En cada numeral, realizar la división indicada y simplificar la fracción resultante.

1. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 7x + 3} \div \dfrac{x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x - 2}$.

2. $\dfrac{x^3 + 125}{x^2 - 64} \div \dfrac{x^3 - 5x^2 + 25x}{x^2 + x - 56}$.

3. $\dfrac{3a^2}{a^2 + 6ab + 9b^2} \div \dfrac{5a^3}{a^2b + 3ab^2}$.

Solución

1. $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-7x+3} \div \dfrac{x^2-x-2}{2x^2+3x-2}$

$$= \frac{x^2-3x+2}{2x^2-7x+3} \cdot \frac{2x^2+3x-2}{x^2-x-2} \qquad \text{Multiplicamos el dividendo por el divisor invertido}$$

$$= \frac{(x-2)(x-1)}{(2x-1)(x-3)} \cdot \frac{(2x-1)(x+2)}{(x-2)(x+1)} \qquad \text{Factorizamos}$$

$$= \frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+1)} \qquad \text{Simplificamos.}$$

2. $\dfrac{x^3+125}{x^2-64} \div \dfrac{x^3-5x^2+25x}{x^2+x-56}$

$$= \frac{x^3+125}{x^2-64} \cdot \frac{x^2+x-56}{x^3-5x^2+25x} \qquad \text{Multiplicamos el dividendo por el divisor invertido}$$

$$= \frac{(x+5)(x^2-5x+25)}{(x+8)(x-8)} \cdot \frac{(x+8)(x-7)}{x(x^2-5x+25)} \qquad \text{Factorizamos}$$

$$= \frac{(x+5)(x-7)}{x(x-8)} \qquad \text{Simplificamos.}$$

3. $\dfrac{3a^2}{a^2+6ab+9b^2} \div \dfrac{5a^3}{a^2b+3ab^2}$

$$= \frac{3a^2}{a^2+6ab+9b^2} \cdot \frac{a^2b+3ab^2}{5a^3} \qquad \text{Multiplicamos el dividendo por el divisor invertido}$$

$$= \frac{3a^2}{(a+3b)^2} \cdot \frac{ab(a+3b)}{5a^3} \qquad \text{Factorizamos}$$

$$= \frac{3b}{5(a+3b)} \qquad \text{Simplificamos.}$$

En los siguientes ejemplos vamos a combinar las operaciones de multiplicación y división.

Ejemplo 47.3

En cada numeral, realizar las operaciones indicadas y simplificar la fracción resultante, si es posible.

1. $\dfrac{a^2-3a}{b^2-2b} \cdot \dfrac{ab^2-2ab}{a^2-9} \div \dfrac{a}{b(a+3)}$.

2. $\dfrac{2x^2+x-3}{2x^2-x-3} \cdot \dfrac{6x^2-7x-3}{x^2+2x-3} \div \dfrac{2x+3}{x+3}$

3. $\dfrac{a^2+ab-6b^2}{a^2+4ab+3b^2} \cdot \dfrac{4a^2-4ab+b^2}{2a^2-5ab+2b^2} \div \dfrac{2a-b}{a+b}$.

Solución

1. $\dfrac{a^2-3a}{b^2-2b}\cdot\dfrac{ab^2-2ab}{a^2-9}\div\dfrac{a}{b\,(a+3)}$

$$= \frac{a^2-3a}{b^2-2b}.\frac{ab^2-2ab}{a^2-9}\cdot\frac{b\,(a+3)}{a} \qquad \text{Convertimos la división en multiplicación}$$

$$= \frac{a\,(a-3)}{b\,(b-2)}\cdot\frac{ab\,(b-2)}{(a+3)\,(a-3)}\cdot\frac{b\,(a+3)}{a} \qquad \text{Factorizamos}$$

$$= ab \qquad \text{Simplificamos.}$$

2. $\dfrac{2x^2+x-3}{2x^2-x-3}\cdot\dfrac{6x^2-7x-3}{x^2+2x-3}\div\dfrac{2x+3}{x+3}$

$$= \frac{2x^2+x-3}{2x^2-x-3}\cdot\frac{6x^2-7x-3}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x+3}{2x+3} \qquad \text{Convertimos la división en multiplicación}$$

$$= \frac{(2x+3)\,(x-1)}{(2x-3)\,(x+1)}\cdot\frac{(3x+1)\,(2x-3)}{(x+3)\,(x-1)}\cdot\frac{x+3}{2x+3} \qquad \text{Factorizamos}$$

$$= \frac{3x+1}{x+1} \qquad \text{Simplificamos.}$$

3. $\dfrac{a^2+ab-6b^2}{a^2+4ab+3b^2}\cdot\dfrac{4a^2-4ab+b^2}{2a^2-5ab+2b^2}\div\dfrac{2a-b}{a+b} = \dfrac{a^2+ab-6b^2}{a^2+4ab+3b^2}\cdot\dfrac{4a^2-4ab+b^2}{2a^2-5ab+2b^2}\cdot\dfrac{a+b}{2a-b}$

$$= \frac{(a+3b)(a-2b)}{(a+3b)(a+b)}\cdot\frac{(2a-b)^2}{(2a-b)(a-2b)}\cdot\frac{a+b}{2a-b}$$

$$= 1.$$

Ejercicios propuestos

En cada uno de los siguientes ejercicios, efectuar las operaciones indicadas y simplificar el resultado.

1. $\dfrac{x-1}{3}\div\dfrac{2x-2}{6}.$

2. $\dfrac{a^2-5a}{b+b^2}\div\left(\dfrac{a^2+6a-55}{b^2-1}\cdot\dfrac{ax+3a}{ab^2+11b^2}\right).$

3. $\dfrac{m^3+6m^2n+9mn^2}{2m^2n+7mn^2+3n^3}\cdot\dfrac{4m^2-n^2}{8m^2-2mn-n^2}\div\dfrac{m^3+27n^3}{16m^2+8mn+n^2}.$

4. $\dfrac{(a^2-ax)^2}{a^2+x^2}\cdot\dfrac{1}{a^3+a^2x}\div\left(\dfrac{a^3-a^2x}{a^2+2ax+x^2}\cdot\dfrac{a^2-x^2}{a^3+ax^2}\right).$

5. $\dfrac{(a^2-3a)^2}{9-a^2}\cdot\dfrac{27-a^3}{(a+3)^2-3a}\div\dfrac{a^4-9a^2}{(a^2+3a)^2}.$

Respuestas

1. 1.
2. $\dfrac{b^2 - b}{x + 3}$.
3. $\dfrac{4m^2 + mn}{m^2n - 3mn^2 + 9n^3}$.
4. $\dfrac{1}{a}$.
5. $a^3 - 3a^2$.

Lección 48

Suma de fracciones

En esta lección aprenderemos a sumar fracciones de igual denominador y, en el caso en que tengan distinto denominador, veremos cómo transformarlas en fracciones equivalentes con igual denominador. Ilustraremos el procedimiento con ejemplos y dejaremos unos ejercicios propuestos para que el estudiante practique y así afiance los conocimientos adquiridos.

Para sumar fracciones procedemos así:

1. Simplificamos las fracciones, si es posible.
2. i) Si las fracciones tienen el mismo denominador, su suma es una fracción con el mismo denominador de las fracciones y cuyo numerador es la suma de los numeradores de las fracciones, es decir,

   $$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}, \quad d \neq 0.$$

   ii) Si las fracciones tienen distinto denominador, las convertimos en fracciones equivalentes con un mismo denominador. Como denominador común se escoge el $M.C.M.$ de los denominadores de las fracciones, el cual se llama **mínimo común denominador**. Los numeradores en las fracciones equivalentes se obtienen dividiendo el mínimo común denominador entre el denominador de cada fracción y multiplicando el resultado por el numerador respectivo.

   Luego sumamos las fracciones resultantes, que tienen el mismo denominador.
3. Reducimos términos semejantes en el numerador.
4. Simplificamos la fracción resultante, si es posible.

Ejemplo 48.1

En cada numeral, realizar las operaciones indicadas y simplificar.

1. $\dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{4}$.
2. $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{2+x}{x+1}$.
3. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9}$.
4. $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2+x}$.

5. $\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{1}{x^2+7x+12}$.

Solución

1. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}=\dfrac{1+5}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$.

2. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2+x}{x+1}=\dfrac{x+2+x}{x+1}=\dfrac{2x+2}{x+1}=\dfrac{2(x+1)}{x+1}=2$.

3. $$\begin{aligned}\frac{1}{3}+\frac{2}{9}&=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2} && \text{Factorizamos denominadores}\\ &=\frac{3}{3^2}+\frac{2}{3^2} && \text{Mínimo común denominador } 3^2\\ &=\frac{3+2}{9}\\ &=\frac{5}{9}.\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+x}&=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x\,(x+1)} && \text{Factorizamos denominadores}\\ &=\frac{x+1}{x^2\,(x+1)}+\frac{x}{x^2\,(x+1)} && \text{Mínimo común denominador } x^2\,(x+1)\\ &=\frac{x+1+x}{x^2\,(x+1)}\\ &=\frac{2x+1}{x^2\,(x+1)}.\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x^2+7x+12}&=\frac{2}{x+3}+\frac{1}{(x+3)\,(x+4)} && \text{Factorizamos denominadores}\\ &=\frac{2\,(x+4)}{(x+3)\,(x+4)}+\frac{1}{(x+3)\,(x+4)} && \text{Mínimo común denominador } (x+3)\,(x+4)\\ &=\frac{2x+8+1}{(x+3)\,(x+4)}\\ &=\frac{2x+9}{(x+3)\,(x+4)}.\end{aligned}$$

Ejemplo 48.2

En cada numeral, realizar las operaciones indicadas y simplificar.

1. $\dfrac{2}{a+1}+\dfrac{a}{(a+1)^2}+\dfrac{a+1}{(a+1)^3}$.

2. $\dfrac{x-2}{2x^2-5x-3}+\dfrac{x-3}{2x^2-3x-2}+\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$.

3. $\dfrac{2y}{3y^2+11y+6}+\dfrac{y+1}{y^2-9}+\dfrac{1}{3y+2}$.

4. $\dfrac{x^2-2xy}{3\left(x^2-y^2\right)}+\dfrac{y}{6x-6y}+\dfrac{x}{4\left(x+y\right)}$.

5. $\dfrac{3x-y}{\left(x-y\right)\left(x+y\right)}+\dfrac{x+3y}{\left(x+y\right)\left(x+2y\right)}+\dfrac{1}{x+2y}$.

Solución

1.
$$\begin{aligned}
\frac{2}{a+1}+\frac{a}{\left(a+1\right)^2}+\frac{a+1}{\left(a+1\right)^3} &= \frac{2}{a+1}+\frac{a}{\left(a+1\right)^2}+\frac{1}{\left(a+1\right)^2} && \text{Simplificamos las fracciones}\\
&= \frac{2\left(a+1\right)}{\left(a+1\right)^2}+\frac{a}{\left(a+1\right)^2}+\frac{1}{\left(a+1\right)^2} && \text{Mínimo común denominador } \left(a+1\right)^2\\
&= \frac{2\left(a+1\right)+a+1}{\left(a+1\right)^2}\\
&= \frac{\left(a+1\right)\left(2+1\right)}{\left(a+1\right)^2}\\
&= \frac{3\left(a+1\right)}{\left(a+1\right)^2}\\
&= \frac{3}{a+1}.
\end{aligned}$$

Nota: En la práctica la reducción al mínimo común denominador y la suma se hacen en un solo paso.

2.
$$\begin{aligned}
&\frac{x-2}{2x^2-5x-3}+\frac{x-3}{2x^2-3x-2}+\frac{2x-1}{x^2-5x+6}\\
&= \frac{x-2}{\left(2x+1\right)\left(x-3\right)}+\frac{x-3}{\left(2x+1\right)\left(x-2\right)}+\frac{2x-1}{\left(x-3\right)\left(x-2\right)} && \text{Factorizamos denominadores}\\
&= \frac{\left(x-2\right)^2+\left(x-3\right)^2+\left(2x-1\right)\left(2x+1\right)}{\left(2x+1\right)\left(x-3\right)\left(x-2\right)} && \text{Mínimo común denominador } \left(2x+1\right)\left(x-3\right)\left(x-2\right)\\
&= \frac{x^2-4x+4+x^2-6x+9+4x^2-1}{\left(2x+1\right)\left(x-3\right)\left(x-2\right)}\\
&= \frac{6x^2-10x+12}{\left(2x+1\right)\left(x-3\right)\left(x-2\right)}.
\end{aligned}$$

3. $\dfrac{2y}{3y^2+11y+6}+\dfrac{y+1}{y^2-9}+\dfrac{1}{3y+2}$

$$= \frac{2y}{(3y+2)(y+3)}+\frac{y+1}{(y+3)(y-3)}+\frac{1}{3y+2} \quad \text{Factorizamos denominadores}$$

$$= \frac{2y(y-3)+(y+1)(3y+2)+(y^2-9)}{(3y+2)(y+3)(y-3)} \quad \text{Mínimo común denominador } (3y+2)(y+3)(y-3)$$

$$= \frac{2y^2-6y+3y^2+5y+2+y^2-9}{(3y+2)(y+3)(y-3)}$$

$$= \frac{6y^2-y-7}{(3y+2)(y+3)(y-3)}.$$

4. $\dfrac{x^2-2xy}{3(x^2-y^2)}+\dfrac{y}{6x-6y}+\dfrac{x}{4(x+y)}$

$$= \frac{x^2-2xy}{3(x+y)(x-y)}+\frac{y}{6(x-y)}+\frac{x}{4(x+y)} \quad \text{Factorizamos denominadores}$$

$$= \frac{4x^2-8xy+2xy+2y^2+3x^2-3xy}{12(x+y)(x-y)} \quad \text{Mínimo común denominador } 12(x+y)(x-y)$$

$$= \frac{7x^2-9xy+2y^2}{12(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{(7x-2y)(x-y)}{12(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{7x-2y}{12(x+y)}.$$

5. $\dfrac{3x-y}{(x-y)(x+y)}+\dfrac{x+3y}{(x+y)(x+2y)}+\dfrac{1}{x+2y}$

$$= \frac{(3x-y)(x+2y)+(x+3y)(x-y)+(x+y)(x-y)}{(x-y)(x+y)(x+2y)} \quad \text{Mínimo común denominador } (x-y)(x+y)(x+2y)$$

$$= \frac{3x^2+5xy-2y^2+x^2+2xy-3y^2+x^2-y^2}{(x-y)(x+y)(x+2y)}$$

$$= \frac{5x^2+7xy-6y^2}{(x-y)(x+y)(x+2y)}$$

$$= \frac{(5x-3y)(x+2y)}{(x-y)(x+y)(x+2y)}$$

$$= \frac{5x-3y}{x^2-y^2}.$$

Ejercicios propuestos

Realizar las operaciones indicadas y simplificar, si es posible, la fracción resultante.

1. $\dfrac{2}{x+4}+\dfrac{1}{x-3}$.

2. $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

3. $\dfrac{1}{x+x^2}+\dfrac{1}{x-x^2}+\dfrac{x+3}{1-x^2}$.

4. $\dfrac{1}{a-5}+\dfrac{a}{a^2-4a-5}+\dfrac{a+5}{a^2+2a+1}$.

5. $\dfrac{1}{y-2}+\dfrac{1-2y^2}{y^3-8}+\dfrac{y}{y^2+2y+4}$.

Respuestas

1. $\dfrac{3x-2}{(x+4)(x-3)}$.

2. $\dfrac{3x^2+2x}{(x+1)(x-1)}$.

3. $\dfrac{x+2}{x(1-x)}$.

4. $\dfrac{3a^2+3a-24}{(a+1)^2(a-5)}$.

5. $\dfrac{5}{y^3-8}$.

Lección 49

Resta o diferencia de fracciones

En esta lección aprenderemos a restar fracciones de igual denominador y, en el caso en que tengan distinto denominador, veremos cómo transformarlas en fracciones equivalentes con igual denominador. En la resta es importante diferenciar el minuendo del sustraendo para el manejo adecuado de los signos. Ilustraremos el procedimiento con ejemplos y dejaremos unos ejercicios propuestos para que el estudiante practique y así afiance los conocimientos adquiridos.

Para restar fracciones procedemos así:

1. Simplificamos las fracciones si es posible.
2. i) Si las fracciones tienen el mismo denominador, su resta o diferencia es una fracción con el mismo denominador de las fracciones y cuyo numerador es la diferencia entre el numerador del minuendo y el numerador del sustraendo, es decir,

   $$\frac{a}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{d}, \quad d \neq 0.$$

   ii) Si las fracciones tienen distinto denominador, las convertimos en fracciones equivalentes con un mismo denominador. Como denominador común se escoge el **mínimo común denominador** de los denominadores de las fracciones.

   Luego restamos las fracciones resultantes, que tienen el mismo denominador.
3. Reducimos términos semejantes en el numerador.
4. Simplificamos, si es posible, la fracción resultante.

Ejemplo 49.1

1. Restar $\frac{2}{3}$ de $\frac{11}{3}$.
2. Restar $\frac{5x+3}{x-1}$ de $\frac{2}{x-1}$.
3. De $\frac{1}{x-4}$ restar $\frac{1}{x-3}$.
4. De $\frac{z+3}{z^2-9}$ restar $\frac{z}{z-3}$.
5. Restar $\frac{x}{a^2-x^2}$ de $\frac{a+x}{(a-x)^2}$.

Solución

1. $\dfrac{11}{3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{11-2}{3}=\dfrac{9}{3}=3.$

2. $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{5x+3}{x-1}=\dfrac{2-(5x+3)}{x-1}=\dfrac{2-5x-3}{x-1}=\dfrac{-1-5x}{x-1}=\dfrac{-(1+5x)}{-(1-x)}=\dfrac{1+5x}{1-x}.$

3. $$\begin{aligned}\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}&=\frac{x-3}{(x-4)(x-3)}-\frac{x-4}{(x-4)(x-3)} \quad \text{Mínimo común denominador } (x-4)(x-3)\\ &=\frac{(x-3)-(x-4)}{(x-4)(x-3)}\\ &=\frac{x-3-x+4}{(x-4)(x-3)}\\ &=\frac{1}{(x-4)(x-3)}.\end{aligned}$$

Nota: En la práctica, para restar fracciones la reducción al mínimo común denominador y las resta se hacen simultáneamente, como en la suma, pero teniendo cuidado con el signo del sustraendo.

4. $$\begin{aligned}\frac{z+3}{z^2-9}-\frac{z}{z-3}&=\frac{z+3}{(z+3)(z-3)}-\frac{z}{z-3} \quad \text{Factorizamos denominadores}\\ &=\frac{1}{z-3}-\frac{z}{z-3} \quad \text{Simplificamos las fracciones}\\ &=\frac{1-z}{z-3}.\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}\frac{a+x}{(a-x)^2}-\frac{x}{a^2-x^2}&=\frac{a+x}{(a-x)^2}-\frac{x}{(a+x)(a-x)} \quad \text{Factorizamos denominadores}\\ &=\frac{(a+x)^2-x(a-x)}{(a-x)^2(a+x)} \quad \text{Mínimo común denominador } (a-x)^2(a+x)\\ &=\frac{a^2+2ax+x^2-ax+x^2}{(a-x)^2(a+x)}\\ &=\frac{a^2+ax+2x^2}{(a-x)^2(a+x)}.\end{aligned}$$

Ejemplo 49.2

Realizar las operaciones indicadas en cada numeral y simplificar, si es posible, la fracción resultante.

1. $\dfrac{1}{x^2-xy}-\dfrac{1}{x^2+xy}-\dfrac{2y}{x^3-xy^2}.$

2. $\dfrac{a^2+b^2}{a^3-b^3}-\dfrac{a+b}{2a^2+2ab+2b^2}-\dfrac{1}{2a-2b}.$

3. $\dfrac{3}{x^2+x+1}-\dfrac{x+2}{(x-1)^2}-\dfrac{1-9x}{(x^3-1)(x-1)}$.

Solución

1. $\dfrac{1}{x^2-xy}-\dfrac{1}{x^2+xy}-\dfrac{2y}{x^3-xy^2}$

$$= \frac{1}{x(x-y)}-\frac{1}{x(x+y)}-\frac{2y}{x(x^2-y^2)}$$

$$= \frac{1}{x(x-y)}-\frac{1}{x(x+y)}-\frac{2y}{x(x+y)(x-y)} \quad \text{Factorizamos denominadores}$$

$$= \frac{x+y-(x-y)-2y}{x(x-y)(x+y)} \quad \text{Mínimo común denominador } x(x-y)(x+y)$$

$$= \frac{x+y-x+y-2y}{x(x-y)(x+y)}$$

$$= 0.$$

2. $\dfrac{a^2+b^2}{a^3-b^3}-\dfrac{a+b}{2a^2+2ab+2b^2}-\dfrac{1}{2a-2b}$

$$= \frac{a^2+b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}-\frac{a+b}{2(a^2+ab+b^2)}-\frac{1}{2(a-b)} \quad \text{Factorizamos denominadores}$$

$$= \frac{2(a^2+b^2)-(a+b)(a-b)-(a^2+ab+b^2)}{2(a-b)(a^2+ab+b^2)} \quad \text{Mínimo común denominador } 2(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$= \frac{2a^2+2b^2-(a^2-b^2)-(a^2+ab+b^2)}{2(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

$$= \frac{2a^2+2b^2-a^2+b^2-a^2-ab-b^2}{2(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

$$= \frac{2b^2-ab}{2(a-b)(a^2+ab+b^2)}.$$

3. $\dfrac{3}{x^2+x+1}-\dfrac{x+2}{(x-1)^2}-\dfrac{1-9x}{(x^3-1)(x-1)}$

$$= \frac{3}{x^2+x+1}-\frac{x+2}{(x-1)^2}-\frac{1-9x}{(x-1)(x^2+x+1)(x-1)} \quad \text{Factorizamos denominadores}$$

$$= \frac{3(x-1)^2-(x+2)(x^2+x+1)-(1-9x)}{(x-1)^2(x^2+x+1)} \quad \text{Mínimo común denominador } (x-1)^2(x^2+x+1)$$

$$= \frac{3x^2-6x+3-x^3-x^2-x-2x^2-2x-2-1+9x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{-x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$= -\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

En el siguiente ejemplo combinamos suma y resta de fracciones.

Ejemplo 49.3

Realizar operaciones y simplificar, cuando sea posible, la fracción resultante.

1. $\dfrac{1}{ax} - \dfrac{1}{a^2+ax} + \dfrac{1}{a+x}$.
2. $\dfrac{x}{x^2+2x-3} + \dfrac{x-3}{(1-x)(x+2)} - \dfrac{1}{x+2}$.

Solución

1. $\dfrac{1}{ax} - \dfrac{1}{a^2+ax} + \dfrac{1}{a+x} = \dfrac{1}{ax} - \dfrac{1}{a(a+x)} + \dfrac{1}{a+x}$ Factorizamos denominadores

$$= \frac{a+x-x+ax}{ax(a+x)}$$ Mínimo común denominador $ax(a+x)$

$$= \frac{a+ax}{ax(a+x)}$$

$$= \frac{a(1+x)}{ax(a+x)}$$

$$= \frac{1+x}{x(a+x)}.$$

2. $\dfrac{x}{x^2+2x-3} + \dfrac{x-3}{(1-x)(x+2)} - \dfrac{1}{x+2}$

$$= \frac{x}{(x-1)(x+3)} + \frac{x-3}{(1-x)(x+2)} - \frac{1}{x+2}$$ Factorizamos denominadores

$$= \frac{x}{(x-1)(x+3)} + \frac{x-3}{-(x-1)(x+2)} - \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{x}{(x-1)(x+3)} - \frac{x-3}{(x-1)(x+2)} - \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{x(x+2)-(x-3)(x+3)-(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x+2)}$$ Mínimo común denominador $(x-1)(x+3)(x+2)$

$$= \frac{x^2+2x-(x^2-9)-(x^2+2x-3)}{(x-1)(x+3)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2+2x-x^2+9-x^2-2x+3}{(x-1)(x+3)(x+2)}$$

$$= \frac{-x^2 + 12}{(x-1)(x+3)(x+2)}$$

$$= \frac{12 - x^2}{(x-1)(x+3)(x+2)}.$$

Ejercicios propuestos

Realizar las operaciones indicadas y simplificar, si es posible, la fracción resultante.

1. $\dfrac{a+5b}{a^2} - \dfrac{b-3}{ab}$.
2. Restar $\dfrac{a+3}{a^2+a-12}$ de $\dfrac{a-4}{a^2-6a+9}$.
3. De $\dfrac{1-x}{1+x}$ restar $\dfrac{1+x}{1-x}$.
4. $\dfrac{x+3}{6x^2+x-2} - \dfrac{1}{4x^2-4x+1}$.
5. $\dfrac{x}{2x+2} - \dfrac{x+1}{3x-3} + \dfrac{x-1}{6x+6} - \dfrac{5}{18x-18}$.

Respuestas

1. $\dfrac{5b^2+3a}{a^2b}$.
2. $-\dfrac{7}{(a-3)^2(a+4)}$.
3. $\dfrac{4x}{x^2-1}$.
4. $\dfrac{2x^2+2x-5}{(2x-1)^2(3x+2)}$.
5. $\dfrac{3x^2-16x-4}{9(x^2-1)}$.

Lección 50

Fracciones complejas I

En esta lección vamos a trabajar con un nuevo tipo de fracciones que difieren de las ya aprendidas en que al menos uno de sus términos es a su vez una fracción.

Si el numerador o el denominador de una fracción, o ambos, contienen a su vez fracciones, la fracción se llama **fracción compleja**. Por ejemplo,

$$\frac{\dfrac{a}{x}}{\dfrac{x}{x+1}}$$

es una fracción compleja.

Un procedimiento para simplificar una fracción compleja es el siguiente:

1. Efectuar las operaciones indicadas en el numerador y denominador, si las hay.
2. Escribir la fracción utilizando el símbolo $\div$.
3. Expresar la división como un producto, invirtiendo el divisor.
4. Factorizar numeradores y denominadores, si es necesario.
5. Simplificar el resultado obtenido.

Ejemplo 50.1

Simplificar las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{3a}{2b}}$.
2. $\dfrac{\dfrac{a}{x}-\dfrac{x}{a}}{1+\dfrac{a}{x}}$.
3. $\dfrac{x+4+\dfrac{3}{x}}{x-4-\dfrac{5}{x}}$.

4. $\dfrac{a-x+\dfrac{x^2}{a+x}}{a^2-\dfrac{a^2}{a+x}}$.

5. $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{20}{a^3}}{\dfrac{16}{a}-a}$.

6. $\dfrac{\dfrac{2a^2-b^2}{a}-b}{\dfrac{4a^2+b^2}{4ab}+1}$.

Solución

1. $\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{3a}{2b}}=\dfrac{a}{b}\div\dfrac{3a}{2b}$ Escribimos la fracción utilizando el símbolo $\div$

$=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{2b}{3a}$ Expresamos la división como un producto, invirtiendo el divisor

$=\dfrac{2}{3}$ Simplificamos.

2. $\dfrac{\dfrac{a}{x}-\dfrac{x}{a}}{1+\dfrac{a}{x}}=\dfrac{\dfrac{a^2-x^2}{ax}}{\dfrac{x+a}{x}}$ Efectuamos operaciones en numerador y denominador

$=\dfrac{a^2-x^2}{ax}\div\dfrac{x+a}{x}$ Escribimos la fracción utilizando el símbolo $\div$

$=\dfrac{a^2-x^2}{ax}\cdot\dfrac{x}{x+a}$ Escribimos la división como un producto, invirtiendo el divisor

$=\dfrac{a-x}{a}$ Factorizamos y simplificamos.

3. $\dfrac{x+4+\dfrac{3}{x}}{x-4-\dfrac{5}{x}}=\dfrac{\dfrac{x^2+4x+3}{x}}{\dfrac{x^2-4x-5}{x}}$ Efectuamos operaciones en numerador y denominador

$=\dfrac{x^2+4x+3}{x}\div\dfrac{x^2-4x-5}{x}$ Escribimos la fracción utilizando el símbolo $\div$

$$= \frac{x^2+4x+3}{x} \cdot \frac{x}{x^2-4x-5}$$ Escribimos la división como un producto, invirtiendo el divisor

$$= \frac{(x+3)(x+1)}{x} \cdot \frac{x}{(x-5)(x+1)}$$ Factorizamos numeradores y denominadores

$$= \frac{x+3}{x-5}$$ Simplificamos.

4. $$\frac{a-x+\dfrac{x^2}{a+x}}{a^2-\dfrac{a^2}{a+x}} = \frac{\dfrac{a^2-x^2+x^2}{a+x}}{\dfrac{a^3+a^2x-a^2}{a+x}}$$ Efectuamos operaciones en numerador y denominador

$$= \frac{a^2}{a+x} \cdot \frac{a+x}{a^3+a^2x-a^2}$$ Escribimos la división como un producto, invirtiendo el divisor

$$= \frac{a^2}{a^2(a+x-1)}$$ Factorizamos y simplificamos

$$= \frac{1}{a+x-1}$$ Simplificamos.

Nota: En la práctica podemos eliminar el paso de escribir la fracción utilizando el símbolo $\div$, expresándola directamente como un producto, invirtiendo el divisor.

5. $$\frac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{20}{a^3}}{\dfrac{16}{a}-a} = \frac{\dfrac{a^2-9a+20}{a^3}}{\dfrac{16-a^2}{a}}$$ Efectuamos operaciones en numerador y denominador

$$= \frac{\dfrac{(a-5)(a-4)}{a^3}}{\dfrac{(4+a)(4-a)}{a}}$$ Factorizamos numerador y denominador

$$= \frac{(a-5)(a-4)}{a^3} \cdot \frac{a}{(4+a)(4-a)}$$ Escribimos la división como un producto, invirtiendo el divisor

$$= \frac{a(5-a)(4-a)}{a^3(4+a)(4-a)}$$ Porque $a-5=-(5-a)$ y $a-4=-(4-a)$

$$= \frac{5-a}{a^2(4+a)}$$ Simplificamos.

6. $$\frac{\dfrac{2a^2-b^2}{a}-b}{\dfrac{4a^2+b^2}{4ab}+1}=\frac{\dfrac{2a^2-b^2-ab}{a}}{\dfrac{4a^2+b^2+4ab}{4ab}}$$ Efectuamos operaciones en numerador y denominador

$$=\frac{\dfrac{(2a+b)(a-b)}{a}}{\dfrac{(2a+b)^2}{4ab}}$$ Factorizamos numerador y denominador

$$=\frac{(2a+b)(a-b)}{a}\cdot\frac{4ab}{(2a+b)^2}$$ Escribimos la división como un producto, invirtiendo el divisor

$$=\frac{4b(a-b)}{2a+b}$$ Simplificamos.

Ejercicios propuestos

Simplificar las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{x-1-\dfrac{5}{x+3}}{x+5-\dfrac{35}{x+3}}$.

2. $\dfrac{1-\dfrac{b}{2a-3b}}{1+\dfrac{b}{a-3b}}$.

3. $\dfrac{x+1+\dfrac{x+1}{x-1}}{x-\dfrac{2}{x-1}}$.

4. $\dfrac{a+5-\dfrac{14}{a}}{1+\dfrac{8}{a}+\dfrac{7}{a^2}}$.

5. $\dfrac{a+2-\dfrac{7a+9}{a+3}}{a-4+\dfrac{5a-11}{a+1}}$.

Respuestas

1. $\dfrac{x+4}{x+10}$.

2. $\dfrac{2a-6b}{2a+3b}$.

3. $\dfrac{x}{x-2}$.

4. $\dfrac{a^2-2a}{a+1}$.

5. $\dfrac{a^2+2a+1}{a^2+8a+15}$.

Lección 51

Fracciones complejas II

En esta lección vamos a resolver nuevos ejercicios de fracciones complejas con un mayor grado de dificultad que los presentados en la lección anterior, con el propósito de que el estudiante adquiera más agilidad y comprensión en el tema.

Ejemplo 51.1

Simplificar las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{1+\dfrac{x+1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}$

2. $\dfrac{1+\dfrac{2x}{1+x^2}}{2x+\dfrac{2x^5+2}{1-x^4}}$

3. $\dfrac{\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{b+x}{b-x}}{\dfrac{2}{a-x}-\dfrac{2}{b-x}}$

4. $\dfrac{\dfrac{1}{x+y+z}-\dfrac{1}{x-y+z}}{\dfrac{1}{x-y+z}-\dfrac{1}{x+y+z}}$

5. $\dfrac{\dfrac{a}{a+x}-\dfrac{a}{2a+2x}}{\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{a}{a+x}}$

6. $\dfrac{x-2y-\dfrac{4y^2}{x+y}}{x-3y-\dfrac{5y^2}{x+y}}$

Solución

1. $$\frac{1+\dfrac{x+1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}=\frac{\dfrac{x-1+x+1}{x-1}}{\dfrac{x+1-x+1}{(x-1)(x+1)}}$$ Efectuamos operaciones en numerador y denominador

$$=\frac{\dfrac{2x}{x-1}}{\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}}$$ Reducimos términos semejantes

$$=\frac{2x}{x-1}\div\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$ Escribimos la fracción utilizando el el símbolo $\div$

$$=\frac{2x}{x-1}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{2}$$ Expresamos la división como multiplicación

$$=x(x+1)$$ Simplificamos.

2. $$\frac{1+\dfrac{2x}{1+x^2}}{2x+\dfrac{2x^5+2}{1-x^4}}=\frac{\dfrac{1+x^2+2x}{1+x^2}}{\dfrac{2x-2x^5+2x^5+2}{1-x^4}}$$ Efectuamos operaciones en numerador y denominador

$$=\frac{\dfrac{1+x^2+2x}{1+x^2}}{\dfrac{2x-2x^5+2x^5+2}{1-x^4}}$$ Reunimos términos semejantes

$$=\frac{\dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}}{\dfrac{2(x+1)}{(1+x^2)(1+x)(1-x)}}$$ Factorizamos todas las partes de las fracciones

$$=\frac{(x+1)^2}{1+x^2}\div\frac{2(x+1)}{(1+x^2)(1+x)(1-x)}$$ Escribimos la fracción utilizando el símbolo $\div$

$$=\frac{(x+1)^2}{1+x^2}\cdot\frac{(1+x^2)(1+x)(1-x)}{2(x+1)}$$ Expresamos la división como multiplicación

$$=\frac{(x+1)^2(1-x)}{2}$$ Simplificamos.

3. $$\frac{\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{b+x}{b-x}}{\dfrac{2}{a-x}-\dfrac{2}{b-x}}=\frac{\dfrac{(a+x)(b-x)-(b+x)(a-x)}{(a-x)(b-x)}}{\dfrac{2(b-x)-2(a-x)}{(a-x)(b-x)}}$$

$$= \frac{\dfrac{ab - ax + bx - x^2 - ab + bx - ax + x^2}{(a-x)(b-x)}}{\dfrac{2b - 2x - 2a + 2x}{(a-x)(b-x)}}$$

$$= \frac{\dfrac{2bx - 2ax}{(a-x)(b-x)}}{\dfrac{2b - 2a}{(a-x)(b-x)}}$$

$$= \frac{2bx - 2ax}{(a-x)(b-x)} \div \frac{2b - 2a}{(a-x)(b-x)}$$

$$= \frac{2bx - 2ax}{(a-x)(b-x)} \cdot \frac{(a-x)(b-x)}{2b - 2a}$$

$$= x.$$

4. $$\frac{\dfrac{1}{x+y+z} - \dfrac{1}{x-y+z}}{\dfrac{1}{x-y+z} - \dfrac{1}{x+y+z}} = \frac{\dfrac{x - y + z - x - y - z}{(x+y+z)(x-y+z)}}{\dfrac{x + y + z - x + y - z}{(x-y+z)(x+y+z)}}$$

$$= \frac{\dfrac{-2y}{(x+y+z)(x-y+z)}}{\dfrac{2y}{(x-y+z)(x+y+z)}}$$

$$= \frac{-2y}{(x+y+z)(x-y+z)} \div \frac{2y}{(x-y+z)(x+y+z)}$$

$$= \frac{-2y}{(x+y+z)(x-y+z)} \cdot \frac{(x-y+z)(x+y+z)}{2y}$$

$$= -1.$$

5. $$\frac{\dfrac{a}{a+x} - \dfrac{a}{2a+2x}}{\dfrac{a}{a-x} + \dfrac{a}{a+x}} = \frac{\dfrac{2a - a}{2(a+x)}}{\dfrac{a(a+x) + a(a-x)}{(a-x)(a+x)}}$$

$$= \frac{\dfrac{a}{2(a+x)}}{\dfrac{a^2 + ax + a^2 - ax}{(a-x)(a+x)}}$$

$$= \frac{\dfrac{a}{2(a+x)}}{\dfrac{2a^2}{(a-x)(a+x)}}$$

$$= \frac{a}{2(a+x)} \div \frac{2a^2}{(a-x)(a+x)}$$

$$= \frac{a}{2(a+x)} \cdot \frac{(a-x)(a+x)}{2a^2}$$

$$= \frac{a-x}{4a}.$$

6. $$\frac{x-2y-\dfrac{4y^2}{x+y}}{x-3y-\dfrac{5y^2}{x+y}} = \frac{\dfrac{x^2+xy-2xy-2y^2-4y^2}{x+y}}{\dfrac{x^2+xy-3xy-3y^2-5y^2}{x+y}}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2-xy-6y^2}{x+y}}{\dfrac{x^2-2xy-8y^2}{x+y}}$$

$$= \frac{\dfrac{(x-3y)(x+2y)}{x+y}}{\dfrac{(x-4y)(x+2y)}{x+y}}$$

$$= \frac{(x-3y)(x+2y)}{x+y} \div \frac{(x-4y)(x+2y)}{x+y}$$

$$= \frac{(x-3y)(x+2y)}{x+y} \cdot \frac{(x+y)}{(x-4y)(x+2y)}$$

$$= \frac{x-3y}{x-4y}.$$

Ejercicios propuestos

Simplificar las siguientes fracciones:

1. $$\frac{\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{1-a}{a}}{\dfrac{1-a}{a}-\dfrac{a}{1-a}}.$$

2. $\dfrac{1-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}{x-\dfrac{16}{x}}$.

3. $\dfrac{\dfrac{a+2b}{a-b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{3b}{a-b}}$.

4. $\dfrac{x-1-\dfrac{12}{x-2}}{x+6+\dfrac{16}{x-2}}$.

5. $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}$.

Respuestas

1. $\dfrac{2a^2-2a+1}{1-2a}$.

2. $\dfrac{x-3}{x(x+4)}$.

3. 1.

4. $\dfrac{x-5}{x+2}$.

5. $\dfrac{2}{x^2+1}$.

Lección 52

Ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios

En esta lección estudiaremos la forma de resolver ecuaciones lineales o de primer grado cuando al menos uno de los coeficientes es un número fraccionario.

Para resolver una ecuación de este tipo la transformamos en una ecuación equivalente que no contenga fracciones, multiplicando ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador de los denominadores de la ecuación original. Recordemos que al multiplicar ambos miembros de una ecuación por la misma cantidad, ésta debe ser diferente de cero, ya que de lo contrario la ecuación resultante no sería equivalente a la original.

Ejemplo 52.1

En cada numeral, resolver la ecuación.

1. $\dfrac{x}{2}+2-\dfrac{x}{12}=\dfrac{x}{6}-\dfrac{5}{4}$.
2. $2y-\dfrac{y}{2}+\dfrac{y+1}{4}=6y$.
3. $\dfrac{3}{5}(2z-7)-\dfrac{2}{3}(z-8)=\dfrac{4z+1}{15}+4$.

Solución

1. El mínimo común denominador de los denominadores $2, 12, 6$ y 4 es 12 y $12 \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{2}+2-\frac{x}{12}\right)(12) &= \left(\frac{x}{6}-\frac{5}{4}\right)(12) && \text{Multiplicamos ambos miembros por 12}\\
6x+24-x &= 2x-15 && \text{Realizamos operaciones}\\
6x-x-2x &= -15-24 && \text{Trasponemos términos}\\
3x &= -39 && \text{Reducimos términos semejantes}\\
x &= -13 && \text{Dividimos ambos miembros entre 3.}
\end{aligned}$$

Luego, $x=-13$ es la solución de la ecuación original.

Verifiquemos que $x=-13$ es solución, reemplazando x por -13 en la ecuación original:

$\dfrac{-13}{2}+2+\dfrac{13}{12}=\dfrac{-13}{6}-\dfrac{5}{4}$. Realizamos las operaciones y obtenemos $\dfrac{-41}{12}=\dfrac{-41}{12}$.

2. El mínimo común denominador de los denominadores 2 y 4 es 4 y $4 \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\left(2y - \frac{y}{2} + \frac{y+1}{4}\right)(4) &= (6y)(4) && \text{Multiplicamos ambos miembros por 4}\\
8y - 2y + y + 1 &= 24y && \text{Realizamos operaciones}\\
8y - 2y + y - 24y &= -1 && \text{Trasponemos términos}\\
-17y &= -1 && \text{Reducimos términos semejantes}\\
y &= \frac{1}{17} && \text{Dividimos ambos miembros entre } -17.
\end{aligned}$$

Luego, $y = -\dfrac{1}{17}$ es la solución de la ecuación original.

Verifiquemos que $y = \dfrac{1}{17}$ satisface la ecuación, reemplazando y por este valor en la ecuación original:

$2\left(\dfrac{1}{17}\right) - \dfrac{\frac{1}{17}}{2} + \dfrac{\frac{1}{17}+1}{4} = 6\left(\dfrac{1}{17}\right)$. Realizamos las operaciones y obtenemos $\dfrac{6}{17} = \dfrac{6}{17}$.

3. El mínimo común denominador de los denominadores 5, 3 y 15 es 15 y $15 \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\left[\frac{3}{5}(2z-7) - \frac{2}{3}(z-8)\right](15) &= \left[\frac{4z+1}{15} + 4\right](15) && \text{Multiplicamos ambos miembros por 15}\\
9(2z-7) - 10(z-8) &= 4z + 1 + 60 && \text{Realizamos operaciones}\\
18z - 63 - 10z + 80 &= 4z + 61 && \text{Realizamos operaciones}\\
18z - 10z - 4z &= 61 + 63 - 80 && \text{Trasponemos términos}\\
4z &= 44 && \text{Reducimos términos semejantes}\\
z &= 11 && \text{Dividimos ambos miembros entre 4.}
\end{aligned}$$

Luego, $z = 11$ es la solución de la ecuación original.

Verifiquemos que $z = 11$ satisface la ecuación, reemplazando z por 11 en la ecuación original:

$\dfrac{3}{5}[2(11) - 7] - \dfrac{2}{3}[11 - 8] = \dfrac{4(11)+1}{15} + 4$. Realizamos operaciones y obtenemos $7 = 7$.

Ejemplo 52.2

En cada numeral, hallar la solución de la ecuación.

1. $x - \left(3x - \dfrac{2x+5}{10}\right) = \dfrac{1}{6}(2x + 67) + \dfrac{5}{3}\left(1 + \dfrac{x}{5}\right)$.

2. $\left(3 - \dfrac{x}{2}\right) - \left(1 - \dfrac{x}{3}\right) = 7 - \left(x - \dfrac{x}{2}\right)$.

Solución

1. El mínimo común denominador de los denominadores 10, 6 y 3 es 30 y $30 \neq 0$.

$$\left[x-\left(3x-\frac{2x+5}{10}\right)\right](30)=\left[\frac{1}{6}(2x+67)+\frac{5}{3}\left(1+\frac{x}{5}\right)\right](30) \quad \text{Multiplicamos ambos miembros por 30}$$

$$30x-(90x-6x-15)=5(2x+67)+50\left(1+\frac{x}{5}\right) \quad \text{Realizamos operaciones}$$

$$30x-90x+6x+15=10x+335+50+10x \quad \text{Realizamos operaciones}$$

$$-54x+15=20x+385 \quad \text{Reducimos términos semejantes}$$

$$-54x-20x=385-15 \quad \text{Trasponemos términos}$$

$$-74x=370 \quad \text{Reducimos términos semejantes}$$

$$x=-5 \quad \text{Dividimos ambos miembros entre } -74.$$

Luego, $x=-5$ es la solución de la ecuación original.

Verifiquemos que $x=-5$ satisface la ecuación, para lo cual reemplazamos este valor en la ecuación original:

$$-5-\left[3(-5)-\frac{2(-5)+5}{10}\right]=\frac{1}{6}[2(-5)+67]+\frac{5}{3}\left(1+\frac{-5}{5}\right).$$

Realizamos las operaciones y obtenemos $\frac{19}{2}=\frac{19}{2}$.

2. El mínimo común denominador de los denominadores 2 y 3 es 6 y $6 \neq 0$.

$$\left[\left(3-\frac{x}{2}\right)-\left(1-\frac{x}{3}\right)\right](6)=\left[7-\left(x-\frac{x}{2}\right)\right](6) \quad \text{Multiplicamos ambos miembros por 6}$$

$$18-3x-(6-2x)=42-(6x-3x) \quad \text{Realizamos operaciones}$$

$$18-3x-6+2x=42-6x+3x \quad \text{Eliminamos símbolos de agrupación}$$

$$12-x=42-3x \quad \text{Reducimos términos semejantes}$$

$$-x+3x=42-12 \quad \text{Trasponemos términos}$$

$$2x=30 \quad \text{Reducimos términos semejantes}$$

$$x=15 \quad \text{Dividimos ambos miembros entre 2.}$$

Luego, $x=15$ es la solución de la ecuación original.

Verifiquemos que $x=15$ satisface la ecuación, reemplazando este valor en la ecuación original:

$$\left(3-\frac{15}{2}\right)-\left(1-\frac{15}{3}\right)=7-\left(15-\frac{15}{2}\right).$$

Al realizar las operaciones obtenemos $-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{5} + 2x = \dfrac{5}{4} - \dfrac{3x}{20}$.

2. $z - \dfrac{5z-1}{3} = 4z - \dfrac{3}{5}$.

3. $5 + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{3}\left(2 - \dfrac{y}{2}\right) - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4}\left(10 - \dfrac{5y}{3}\right)$.

4. $(w+3)(w-3) - w^2 - \dfrac{5}{4} = \left(w - \dfrac{w}{5}\right) - \left(3w - \dfrac{3}{4}\right)$.

Respuestas

1. $x = \dfrac{1}{2}$.

2. $z = \dfrac{1}{5}$.

3. $y = -3$.

4. $w = 5$.

Lección 53

Solución de problemas con ecuaciones lineales de coeficientes fraccionarios

En esta lección vamos a trabajar problemas que involucran ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios.

Problema 1

Hallar el número que disminuido en sus $\frac{3}{8}$ equivale a su doble disminuido en 11.

Solución

Sea x el número. Entonces $\frac{3}{8}x$ son los tres octavos del número y $2x$ es el doble del número.

De acuerdo con las condiciones del problema, tenemos la ecuación

$$x - \frac{3}{8}x = 2x - 11.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned}
8x - 3x &= 16x - 88 && \text{Multiplicamos ambos miembros por 8}\\
8x - 3x - 16x &= -88 && \text{Trasponemos términos}\\
-11x &= -88 && \text{Reducimos términos semejantes}\\
x &= 8 && \text{Despejamos } x.
\end{aligned}$$

Luego, el número buscado es 8. Verificar que este número satisface las condiciones del problema.

Problema 2

Después de vender los $\frac{3}{5}$ de una pieza de tela quedan 40 metros. ¿Cuál era la longitud de la pieza?

Solución

Sea x la longitud de la pieza. Entonces $\frac{3}{5}x$ es la longitud de la pieza vendida.

De acuerdo a las condiciones de problema, tenemos la ecuación

$$x - \frac{3}{5}x = 40.$$

Resolvamos esta ecuación para x:

$$
\begin{aligned}
5x - 3x &= 200 && \text{Multiplicamos ambos miembros por 5}\\
2x &= 200 && \text{Efectuamos operaciones}\\
x &= 100 && \text{Despejamos } x.
\end{aligned}
$$

Luego, la longitud de la pieza es 100 metros lo cual satisface las condiciones del problema ya que los $\frac{2}{5}$ de ella equivalen a 40 metros.

Problema 3

Hallar dos números consecutivos tales que el menor exceda en 81 a la diferencia entre los $\frac{3}{4}$ del menor y los $\frac{2}{5}$ del mayor.

Solución

Sea x el número menor. Por tanto, $x+1$ es el número mayor, $\frac{3}{4}x$ son los tres cuartos del menor y $\frac{2}{5}(x+1)$ son los dos quintos del mayor.

De acuerdo al enunciado del problema, podemos plantear la ecuación

$$x - 81 = \frac{3}{4}x - \frac{2}{5}(x+1).$$

Resolvamos esta ecuación:

$$
\begin{aligned}
20x - 1.620 &= 15x - 8x - 8 && \text{Multiplicamos ambos miembros por 20}\\
20x - 15x + 8x &= 1.620 - 8 && \text{Trasponemos términos}\\
13x &= 1.612 && \text{Reducimos términos semejantes}\\
x &= 124 && \text{Despejamos } x.
\end{aligned}
$$

Luego, los números son 124 y 125.

Problema 4

En tres días un hombre ganó 175.000 pesos Si cada día ganó la mitad de lo que ganó el día anterior, ¿cuánto ganó cada día?

Solución

Si x es la cantidad que ganó el primer día, $\frac{x}{2}$ es lo que ganó el segundo día y $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{4}$ lo que ganó el tercer día.

Como en total ganó 175.000, planteamos la ecuación

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 175.000.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 4x + 2x + x &= 700.000 && \text{Multiplicamos ambos miembros por 4} \\ 7x &= 700.000 && \text{Reducimos términos semejantes} \\ x &= 100.000 && \text{Despejamos } x. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que el primer día ganó 100.000 pesos, el segundo 50.000 y el tercero 25.000.

Problema 5

Los $\frac{4}{5}$ de las aves de una granja son palomas; los $\frac{3}{4}$ del resto gallinas y las 4 aves restantes gallos. ¿Cuántas aves hay en la granja?

Solución

Si x es el número de aves que hay en la granja, entonces $\frac{4}{5}x$ es el número de palomas, $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}x\right) = \frac{3}{20}x$ es el número de gallinas y 4 es el número de gallos. Como el total de aves es x, planteamos la ecuación

$$\frac{4}{5}x + \frac{3}{20}x + 4 = x.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 16x + 3x + 80 &= 20x && \text{Multiplicamos ambos miembros por 20} \\ 16x + 3x - 20x &= -80 && \text{Trasponemos términos} \\ -x &= -80 && \text{Reducimos términos semejantes} \\ x &= 80 && \text{Despejamos } x. \end{aligned}$$

Por tanto, el total de aves es 80, de las cuales 64 son palomas, 12 son gallinas y 4 son gallos.

Problema 6

La edad de B es $\frac{2}{5}$ de la de A y la de C es $\frac{2}{3}$ de la de B. Si entre los tres tienen 25 años, ¿ cúal es la edad de cada uno?

Solución

Sea x la edad de A. Por tanto, la edad de B es $\frac{2}{5}x$ y la de C es $\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}x\right) = \frac{4}{15}x$.

De acuerdo con las condiciones del problema, tenemos la ecuación

$$x + \frac{2}{5}x + \frac{4}{15}x = 25.$$

Resolvamos esta ecuación

$$
\begin{aligned}
15x + 6x + 4x &= 375 && \text{Multiplicamos amboa miembros por 15}\\
25x &= 375 && \text{Reducimos términos semejantes}\\
x &= 15 && \text{Despejamos } x.
\end{aligned}
$$

Por tanto, la edad de A es 15 años, la de B es 6 años y la de C es 4 años.

Problema 7

Se tienen tres números consecutivos tales que la diferencia entre los $\frac{3}{7}$ del intermedio y los $\frac{3}{10}$ del menor excede en 1 a $\frac{1}{11}$ del mayor. Hallar los números.

Solución

Sean: x el menor, $x+1$ el intermedio y $x+2$ el mayor.

De acuerdo al enunciado del problema, se tiene la ecuación

$$\frac{3}{7}(x+1) - \frac{3}{10}x - 1 = \frac{1}{11}(x+2).$$

Resolvamos esta ecuación:

$$
\begin{aligned}
330(x+1) - 231x - 770 &= 70(x+2) && \text{Multiplicamos ambos miembros por 770}\\
330x + 330 - 231x - 770 &= 70x + 140 && \text{Efectuamos las multiplicaciones}\\
99x - 70x &= 140 + 440 && \text{Trasponemos términos}\\
29x &= 580 && \text{Reducimos términos semejantes}\\
x &= 20 && \text{Despejamos } x.
\end{aligned}
$$

Por tanto, los números pedidos son 20, 21 y 22.

Problema 8

En 4 días un hombre recorrió 120 kilómetros. Si cada día recorrió $\frac{1}{3}$ de lo que recorrió el día anterior, ¿cuántos kilómetros recorrió cada día?

Solución

Sea x lo que recorrió el primer día. Luego, $\frac{1}{3}x$ es lo recorrido el segundo día, $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{9}x$ es lo recorrido el tercer día y $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}x\right) = \frac{1}{27}x$ lo recorrido el cuarto día.

Por tanto, planteamos la siguiente ecuación

$$x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}x = 120.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$
\begin{aligned}
27x + 9x + 3x + x &= 3.240 && \text{Multiplicamos ambos miembros por 27}\\
40x &= 3.240 && \text{Reducimos términos semejantes}\\
x &= 81 && \text{Despejamos } x.
\end{aligned}
$$

Así, el primer día recorrió 81 km, el segundo 27 km, el tercero 9 km y el cuarto 3, para un total de 120 km.

Ejercicios propuestos

1. A tiene los $\frac{4}{5}$ de lo que tiene B. Si A gana 13.000 y B pierde 5.000 ambos tendrían lo mismo. ¿Cuánto tiene cada uno?
2. Un hombre gastó el año antepasado los $\frac{3}{8}$ de sus ahorros; el año pasado $\frac{5}{12}$ de sus ahorros iniciales; este año $\frac{3}{5}$ de lo que le quedaba y aún tiene 4.000. ¿A cuánto ascendian sus ahorros?
3. La edad actual de A es $\frac{1}{4}$ de la de B; hace 10 años era $\frac{1}{10}$. Hallar las edades actuales.
4. Dividir 350 en dos partes, tales que la diferencia entre la parte menor y los $\frac{3}{5}$ de la mayor equivalga a la diferencia entre la parte mayor y los $\frac{17}{15}$ de la menor.

Respuestas

1. B tiene 90.000 y A tiene 72.000
2. 480.000.
3. A tiene 15 años y B tiene 60 años.
4. 200 y 150.

Lección 54

Ecuaciones fraccionarias I

En esta lección aprenderemos la forma de resolver ecuaciones que involucran fracciones en las cuales al menos uno de los denominadores contiene la variable.

Decimos que una **ecuación es fraccionaria** cuando contiene fracciones en las cuales la variable o incógnita está en al menos uno de los denominadores. Debemos tener en cuenta que los valores de la variable o incógnita que anulan el denominador no son soluciones de la ecuación, puesto que la división entre 0 no tiene sentido en los números reales.

Para resolver estas ecuaciones procedemos como en el caso de ecuaciones de primer grado con coeficientes fraccionarios, multiplicando ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador de los denominadores para obtener una ecuación equivalente que no contenga fracciones. Debemos establecer restricciones sobre la variable para que la expresión por la cual multiplicamos ambos miembros sea diferente de cero y así la ecuación que se obtiene sea equivalente a la ecuación dada.

Ejemplo 54.1

Hallar los valores de y que satisfacen la ecuación

$$\frac{3}{y-4}=\frac{2}{y-3}+\frac{8}{y^2-7y+12}.$$

Solución

Factorizando los denominadores obtenemos:

$$\frac{3}{y-4}=\frac{2}{y-3}+\frac{8}{(y-4)\,(y-3)}.$$

Debemos tener en cuenta que $y\neq 4$ y $y\neq 3$, ya que estos valores hacen 0 los denominadores.

El mínimo común denominador de los denominadores es $(y-4)\,(y-3)$. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(y-4)\,(y-3)$ tenemos

$$(y-4)\,(y-3)\,\frac{3}{y-4}=(y-4)\,(y-3)\left(\frac{2}{y-3}+\frac{8}{(y-4)\,(y-3)}\right).$$

Simplificando en ambos miembros obtenemos

$$3\,(y-3)=2\,(y-4)+8.$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación dada si $(y-4)(y-3) \neq 0$, es decir, si $y \neq 4$ y $y \neq 3$. Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 3(y-3) &= 2(y-4)+8 \\ 3y-9 &= 2y-8+8 \\ 3y-2y &= 9 \\ y &= 9 \end{aligned}$$

Como $9 \neq 4$ y $9 \neq 3$ entonces $y = 9$ es la solución de la ecuación original.

Verifiquemos que $y = 9$ satisface la ecuación, reemplazando y por 9 en la ecuación original: $\dfrac{3}{9-4} = \dfrac{2}{9-3} + \dfrac{8}{9^2 - 7(9) + 12}$. Realizando operaciones obtenemos $\dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}$.

Ejemplo 54.2

Hallar los valores de x que satisfacen la ecuación

$$\frac{5x+8}{3x+4} = \frac{5x+2}{3x-4}.$$

Solución

Debemos tener en cuenta que $x \neq -\dfrac{4}{3}$ y $x \neq \dfrac{4}{3}$, ya que estos valores hacen 0 los denominadores.

El mínimo común denominador de los denominadores es $(3x+4)(3x-4)$. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(3x+4)(3x-4)$ tenemos

$$(3x+4)(3x-4)\frac{5x+8}{3x+4} = (3x+4)(3x-4)\frac{5x+2}{3x-4}.$$

Simplificando en ambos miembros obtenemos

$$(3x-4)(5x+8) = (3x+4)(5x+2).$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación dada si $(3x+4)(3x-4) \neq 0$, es decir, si $x \neq -\dfrac{4}{3}$ y $x \neq \dfrac{4}{3}$. Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 15x^2 + 4x - 32 &= 15x^2 + 26x + 8 \\ -22x &= 40 \\ x &= \frac{40}{-22} \\ x &= -\frac{20}{11}. \end{aligned}$$

Como $-\dfrac{20}{11} \neq -\dfrac{4}{3}$ y $-\dfrac{20}{11} \neq \dfrac{4}{3}$, entonces $x = -\dfrac{20}{11}$ es la solución de la ecuación original.

Verifiquemos que $x = -\dfrac{20}{11}$ satisface la ecuación, reemplazando x por $-\dfrac{20}{11}$ en la ecuación original: $\dfrac{5\left(-\dfrac{20}{11}\right)+8}{3\left(-\dfrac{20}{11}\right)+4} = \dfrac{5\left(-\dfrac{20}{11}\right)+2}{3\left(-\dfrac{20}{11}\right)-4}$.

Realizando operaciones obtenemos $\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Ejemplo 54.3

Hallar los valores de z que satisfacen la ecuación

$$\frac{2z-1}{2z+1} - \frac{z-4}{3z-2} = \frac{2}{3}.$$

Solución

Debemos tener en cuenta que $z \neq -\dfrac{1}{2}$ y $z \neq \dfrac{2}{3}$, ya que estos valores hacen 0 los denominadores.

El mínimo común denominador de los denominadores es $3\,(2z+1)\,(3z-2)$. Multiplicando ambos miembros de la ecuación original por $3\,(2z+1)\,(3z-2)$ tenemos

$$3\,(2z+1)\,(3z-2)\left(\frac{2z-1}{2z+1} - \frac{z-4}{3z-2}\right) = 3\,(2z+1)\,(3z-2)\,\frac{2}{3}.$$

Simplificando en ambos miembros obtenemos

$$3\,(3z-2)\,(2z-1) - 3\,(2z+1)\,(z-4) = 2\,(2z+1)\,(3z-2)\,.$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación dada si $3\,(2z+1)\,(3z-2) \neq 0$, es decir, si $z \neq -\dfrac{1}{2}$ y $z \neq \dfrac{2}{3}$. Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned}
3\left(6z^2-7z+2\right) - 3\left(2z^2-7z-4\right) &= 2\left(6z^2-z-2\right)\\
18z^2-21z+6-6z^2+21z+12 &= 12z^2-2z-4\\
2z &= -22\\
z &= -11.
\end{aligned}$$

Como $-11 \neq -\dfrac{1}{2}$ y $-11 \neq \dfrac{2}{3}$, entonces $z = -11$ es la solución de la ecuación original.

Verifiquemos que $z = -11$ satisface la ecuación, sustituyendo z por -11 en la ecuación original: $\dfrac{2\,(-11)-1}{2\,(-11)+1} - \dfrac{(-11)-4}{3\,(-11)-2} = \dfrac{2}{3}$.

Realizando las operaciones obtenemos $\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{1}{3z-3}+\dfrac{1}{4z+4}=\dfrac{1}{12z-12}$.
2. $\dfrac{4y+3}{2y-5}-\dfrac{3y+8}{3y-7}=1$.
3. $2\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)-3\left(\dfrac{x-2}{2x+3}\right)=\dfrac{x^2+78}{2x^2-x-6}$.
4. $\dfrac{1+2w}{1+3w}-\dfrac{1-2w}{1-3w}=-\dfrac{3w-14}{1-9w^2}$.

Respuestas

1. $z=0$.
2. $y=\dfrac{16}{9}$.
3. $x=3$.
4. $w=14$.

Lección 55

Ecuaciones fraccionarias II

En esta lección continuaremos resolviendo ejercicios sobre ecuaciones fraccionarias, considerando algunos casos especiales.

Ejemplo 55.1

Hallar los valores de x que satisfacen la ecuación

$$\frac{2}{3} - \frac{6x^2}{9x^2 - 1} = \frac{2}{3x - 1}.$$

Solución

Factorizando los denominadores, obtenemos

$$\frac{2}{3} - \frac{6x^2}{(3x + 1)(3x - 1)} = \frac{2}{3x - 1}.$$

Debemos tener en cuenta que $x \neq \frac{1}{3}$ y $x \neq -\frac{1}{3}$, ya que estos valores hacen 0 los denominadores.

El mínimo común denominador de los denominadores es $3(3x + 1)(3x - 1)$. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $3(3x + 1)(3x - 1)$ tenemos

$$3(3x + 1)(3x - 1)\left(\frac{2}{3} - \frac{6x^2}{(3x + 1)(3x - 1)}\right) = 3(3x + 1)(3x - 1)\frac{2}{3x - 1}.$$

Simplificando ambos miembros obtenemos

$$2(3x + 1)(3x - 1) - 3\left(6x^2\right) = 3(2)(3x + 1).$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación dada si $3(3x + 1)(3x - 1) \neq 0$, es decir, si $x \neq -\frac{1}{3}$ y $x \neq \frac{1}{3}$. Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned}
2\left(9x^2 - 1\right) - 18x^2 &= 18x + 6\\
18x^2 - 2 - 18x^2 &= 18x + 6\\
-18x &= 8\\
x &= \frac{8}{-18}\\
x &= -\frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

Como $-\dfrac{4}{9} \neq \dfrac{1}{3}$ y $-\dfrac{4}{9} \neq -\dfrac{1}{3}$, $x = -\dfrac{4}{9}$ es la solución de la ecuación original.

Verifiquemos que $x = -\dfrac{4}{9}$ satisface la ecuación, reemplazando x por $-\dfrac{4}{9}$ en la ecuación original: $\dfrac{2}{3} - \dfrac{6\left(-\dfrac{4}{9}\right)^2}{9\left(-\dfrac{4}{9}\right)^2 - 1} = \dfrac{2}{3\left(-\dfrac{4}{9}\right) - 1}$.

Realizando las operaciones obtenemos $-\dfrac{6}{7} = -\dfrac{6}{7}$.

Ejemplo 55.2

Resolver la ecuación

$$\frac{2}{x+1} - 3 = \frac{4x+6}{x+1}.$$

Solución

Debemos tener en cuenta que $x \neq -1$ ya que este valor hace 0 los denominadores.

Multipliquemos ambos miembros de la ecuación por $x+1$.

$$(x+1)\left(\frac{2}{x+1} - 3\right) = (x+1)\,\frac{4x+6}{x+1}.$$

Simplificando ambos miembros obtenemos

$$2 - 3\,(x+1) = 4x + 6.$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación original si $x+1 \neq 0$, es decir, si $x \neq -1$. Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 2 - 3x - 3 &= 4x + 6 \\ -7x &= 7 \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Como vimos, antes de iniciar la solución de la ecuación, $x \neq -1$ puesto que este valor hace 0 los denominadores. Entonces $x = -1$ no es solución de la ecuación original. De hecho, si revisamos el procedimiento observamos que al multiplicar por $x+1$ los dos miembros de la ecuación original, en realidad estabamos multiplicando por 0, y por tanto, la ecuación que obtuvimos no es equivalente a la ecuación original. $x = -1$ es solución de la ecuación $2-3\,(x+1) = 4x+6$, pero no de la ecuación original. Luego, la ecuación $\dfrac{2}{x+1} - 3 = \dfrac{4x+6}{x+1}$ no tiene solución.

Si realizamos la división indicada en el segundo miembro, $\dfrac{4x+6}{x+1}$, de la ecuación original obtenemos

$$\frac{4x+6}{x+1} = 4 + \frac{2}{x+1},$$

y la ecuación original la podemos escribir como:

$$\frac{2}{x+1} - 3 = 4 + \frac{2}{x+1}.$$

Observemos que no existe ningún número real x que satisfaga esta igualdad, pues al sumar números distintos a la expresión $\dfrac{2}{x+1}$ no se obtienen expresiones con el mismo valor.

Este ejemplo nos muestra que si multiplicamos ambos miembros de una ecuación por una expresión que contiene la variable, la ecuación resultante puede tener soluciones que no satisfacen la ecuación original. Dichas soluciones se llaman **soluciones extrañas**.

Cuando multiplicamos ambos miembros de una ecuación por una expresión que involucra la variable, siempre debemos verificar las soluciones obtenidas en la ecuación original, con el fin de determinar si alguna de ellas es extraña.

En el ejemplo anterior, -1 es una solución extraña de la ecuación $\dfrac{2}{x+1} - 3 = \dfrac{4x+6}{x+1}$.

Ejemplo 55.3

Hallar los valores de x que satisfacen la ecuación

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{5}{4x-2} = \frac{3}{8x^2-8x+2}.$$

Solución

Factorizando los denominadores obtenemos:

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{5}{2(2x-1)} = \frac{3}{2(2x-1)^2}.$$

Entonces $x \neq \dfrac{1}{2}$ ya que este valor hace 0 los denominadores.

El mínimo común denominador de los denominadores es $2\,(2x-1)^2$. Multipliquemos ambos miembros por $2\,(2x-1)^2$

$$2\,(2x-1)^2 \left(\frac{3}{2x-1} - \frac{5}{2(2x-1)}\right) = 2\,(2x-1)^2 \left(\frac{3}{2(2x-1)^2}\right).$$

Simplificando ambos miembros obtenemos

$$6\,(2x-1) - 5\,(2x-1) = 3.$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación original si $2x-1 \neq 0$, es decir, si $x \neq \dfrac{1}{2}$. Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 12x - 6 - 10x + 5 &= 3 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Como $2 \neq \dfrac{1}{2}$, $x = 2$ es la solución de la ecuación original.

Verifiquemos que $x = 2$ satisface la ecuación, sustituyendo x por 2 en la ecuación original:

$\dfrac{3}{2(2)-1} - \dfrac{5}{4(2)-2} = \dfrac{3}{8(2)^2 - 8(2) + 2}$.

Realizando las operaciones obtenemos $\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6}$.

Ejemplo 55.4

Mostrar que la ecuación

$$\frac{2x-4}{x-3} = 3 + \frac{2}{x-3}$$

no tiene solución.

Solución

Debemos tener en cuenta que $x \neq 3$ ya que este valor hace 0 los denominadores.

Al hacer la división de $2x - 4$ entre $x - 3$ obtenemos

$$\frac{2x-4}{x-3} = 2 + \frac{2}{x-3}.$$

y la ecuación original la podemos escribir como

$$2 + \frac{2}{x-3} = 3 + \frac{2}{x-3}.$$

Observemos que no existe ningún número real que satisfaga esta igualdad. Por tanto, la ecuación dada no tiene solución.

Ejercicios propuestos

I. Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{4}{z+4} + \dfrac{6}{2z+3} = \dfrac{-6}{2z^2 + 11z + 12}$.
2. $\dfrac{3}{3y-5} - \dfrac{1}{2y-3} = \dfrac{2}{4y-7}$.

II. Mostrar que las siguientes ecuaciones no tienen solución:

1. $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{7}{x^2 - x - 6}$.
2. $\dfrac{x-1}{x-2} + \dfrac{x}{x-3} = \dfrac{x-1}{x-3} + \dfrac{x^2 - 2x + 2}{(x-2)(x-3)}$.

Respuestas

I. 1. $z = -3$.

2. $y = 2$.

Lección 56

Solución de problemas con ecuaciones fraccionarias

En esta lección trabajaremos con problemas que nos llevan a plantear y resolver ecuaciones fraccionarias.

Problema 1

El numerador de una fracción excede al denominador en 22. Si al numerador se le resta 15, la diferencia entre la fracción inicial y la nueva fracción es 3. Hallar la fracción inicial.

Solución

Sea x el denominador y $x + 22$ el numerador. La fracción inicial es entonces $\dfrac{x+22}{x}$. La nueva fracción es $\dfrac{x+22-15}{x} = \dfrac{x+7}{x}$.

De acuerdo al enunciado del problema, planteamos la siguiente ecuación

$$\frac{x+22}{x} - \frac{x+7}{x} = 3.$$

Resolvamos esta ecuación:

$x + 22 - x - 7 = 3x$	Multiplicamos ambos miembros por x, $x \neq 0$
$15 = 3x$	Reducimos términos semejantes en el lado izquierdo
$x = 5$	Despejamos x.

La fracción inicial es $\dfrac{27}{5}$ que satisface las condiciones del problema ya que el numerador que es 27 excede en 22 al denominador.

Problema 2

El denominador de una fracción excede al numerador en 5. Si el denominador se aumenta en 7, el valor de la fracción es $\dfrac{1}{2}$. Hallar la fracción.

Solución

Sea x el numerador de la fracción. Como el denominador excede al numerador en 5, el denominador es $x + 5$. La fracción es $\dfrac{x}{x+5}$.

Según las condiciones del problema, si el denominador de esta fracción se aumenta en 7, la fracción equivale a $\frac{1}{2}$. Entonces planteamos la ecuación

$$\frac{x}{x+5+7}=\frac{1}{2}.$$

Resolvamos esta ecuación:

$\frac{x}{x+12}=\frac{1}{2}$	Reducimos términos semejantes en el denominador del lado izquierdo
$2x=x+12$	Multiplicamos en ambos miembros por $2\,(x+12)$
$2x-x=12$	Trasponemos términos
$x=12$	Efectuamos operaciones.

Por tanto, 12 es el numerador de la fracción, 17 es el denominador y la fracción es $\frac{12}{17}$.

Problema 3

Si a los dos términos de una fracción se resta 3, el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$, y si los dos términos se aumentan en 5, el valor de la fracción es $\frac{3}{5}$. Hallar la fracción.

Solución

Sean x el numerador y y el denominador de la fracción. Por tanto, $\frac{x}{y}$ es la fracción.

Restando 3 a cada término, y de acuerdo al enunciado, se tiene:

$$\frac{x-3}{y-3}=\frac{1}{3} \qquad (1)$$

Sumando 5 a cada término, y según las condiciones del problema, tenemos:

$$\frac{x+5}{y+5}=\frac{3}{5} \qquad (2)$$

Así, el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{y-3}=\dfrac{1}{3} & (1) \\ \dfrac{x+5}{y+5}=\dfrac{3}{5} & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos por $3(y-3)$ ambos miembros de la ecuación (1) y por $5(y+5)$ ambos miembros de la ecuación (2) para eliminar denominadores:

$3(x-3)=y-3$

$5(x+5)=3(y+5)$

Efectuando operaciones y trasponiendo términos tenemos una forma simplificada del sistema, para facilitar las operaciones:

$$\begin{cases} 3x - y = 6 & (3) \\ 5x - 3y = -10 & (4) \end{cases}$$

Multiplicamos la ecuación (3) por 3 y obtenemos $9x - 3y = 18$.

Si a esta ecuación le restamos la ecuación (4), obtenemos $4x = 28$ y así $x = 7$.

Reemplazamos x por 7 en la ecuación (3) y encontramos $y = 3 \cdot 7 - 6 = 15$.

Luego, la fracción pedida es $\dfrac{7}{15}$.

Problema 4

Una llave puede llenar un depósito en 10 minutos y otra en 20 minutos. ¿En cuánto tiempo pueden llenar el depósito las dos llaves juntas?

Solución

Sea x el número de minutos que tardarían las dos llaves juntas en llenar el depósito. Si en x minutos las dos llaves juntas llenan el depósito, en un minuto llenarán $\dfrac{1}{x}$ del depósito. Como la primera llave llena el depósito en 10 minutos, entonces en un minuto llena $\dfrac{1}{10}$ del depósito. Como la segunda llave llena el depósito en 20 minutos, en un minuto llena $\dfrac{1}{20}$ del depósito. Las dos juntas llenarán $\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{20}$ del depósito en un minuto.

Con los datos anteriores, planteamos la siguiente ecuación

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{1}{x}.$$

Resolvamos la ecuación:

$$\begin{aligned} 2x + x &= 20 && \text{Multiplicamos ambos miembros por } 20x \\ 3x &= 20 && \text{Reducimos términos semejantes} \\ x &= \frac{20}{3} && \text{Despejamos } x. \end{aligned}$$

El depósito, con las dos llaves abiertas, se llena en $\dfrac{20}{3}$ minutos equivalente a 6 minutos y 40 segundos.

Problema 5

La suma de dos números es 59 y si el mayor se divide entre el menor, el cociente es 2 y el residuo es 5. Hallar los números.

Solución

Sea x el número mayor. Entonces $59 - x$ es el número menor.

De acuerdo al enunciado del problema, tenemos la ecuación

$$\frac{x}{59 - x} = 2 + \frac{5}{59 - x},$$

con $x \neq 59$, ya que este valor hace 0 el denominador.

Resolvamos esta ecuación:

$x = 2(59 - x) + 5$	Multiplicamos a ambos miembros por $59 - x$
$x = 118 - 2x + 5$	Efectuamos opraciones
$3x = 123$	Trasponemos términos y simplificamos
$x = 41$	Despejamos x.

Por tanto, los números pedidos son 41 el mayor y 18 el menor. Su suma es 59.

Ejercicios propuestos

1. El numerador de una fracción excede al denominador en 2. Si el denominador se aumenta en 7 el valor de la fracción es $1/2$. Hallar la fracción.
2. La cifra de las decenas de un número de dos cifras excede en 3 la cifra de las unidades, y si el número se divide entre la suma de sus cifras, el cociente es 7. Hallar el número.
3. Una suma de 120.000 se reparte por partes iguales entre cierto número de personas. Si el número de personas hubiera sido $\frac{1}{5}$ más de las que había, cada persona hubiera recibido 2.000 menos. ¿Entre cuántas personas se repartió el dinero?
4. A puede hacer una obra en 3 días y B en 6 días. ¿En cuánto tiempo pueden hacer la obra trabajando los dos juntos?
5. El denominador de una fracción excede al doble del numerador en 6. Si el numerador se aumenta en 15 y el denominador se disminuye en 1, el valor de la fracción es $\frac{4}{3}$. Hallar la fracción.
6. La suma de las tres cifras de un número es 6. Si el número se divide por la suma de la cifra de las centenas y la cifra de las decenas, el cociente es 41, y si al número se le añade 198, las cifras se invierten. Halla el número.

Respuestas

1. $\frac{5}{3}$.
2. 63.
3. 10.

4. 2 días.
5. $\dfrac{5}{16}$.
6. 123.

Lección 57

Ecuaciones literales de primer grado

En esta lección aprenderemos la forma de resolver ecuaciones en las que algunas de las cantidades conocidas o constantes están representadas por letras.

Decimos que una **ecuación es literal** cuando algunas o todas las cantidades conocidas o constantes están representadas por letras.

Para resolver estas ecuaciones aplicamos las mismas reglas que hemos utilizado en la solución de ecuaciones de primer grado.

Ejemplo 57.1

En cada numeral, resolver la ecuación dada.

1. $ax - 4 = bx - 2$, con a y b constantes.
2. $(z-a)^2 - (z+a)^2 = a(a-7z)$, donde a es una constante.
3. $m(n-y) - m(n-1) = m(my-a)$, con a, m y n constantes .

Solución

1. $$\begin{aligned} ax - 4 &= bx - 2 && \text{Ecuación dada} \\ ax - bx &= 4 - 2 && \text{Trasponemos términos} \\ (a-b)x &= 2 && \text{Factor común } x \text{ en el primer miembro} \\ x &= \frac{2}{a-b} && \text{Despejamos } x\text{, teniendo en cuenta que } a-b \neq 0. \end{aligned}$$

   Luego, la solución de la ecuación es $x = \dfrac{2}{a-b}$, con $a \neq b$.

   Verificamos que $x = \dfrac{2}{a-b}$ satisface la ecuación, sustituyendo x por $\dfrac{2}{a-b}$ en la ecuación original:
   $$a\left(\frac{2}{a-b}\right) - 4 = b\left(\frac{2}{a-b}\right) - 2.$$

   Realizando las operaciones obtenemos $\dfrac{-2a+4b}{a-b} = \dfrac{-2a+4b}{a-b}$.

2. $$\begin{aligned}
(z-a)^2-(z+a)^2 &= a(a-7z) && \text{Ecuación dada}\\
\left(z^2-2az+a^2\right)-\left(z^2+2az+a^2\right) &= a^2-7az && \text{Efectuamos operaciones en ambos miembros}\\
-4az &= a^2-7az && \text{Reducimos términos semejantes}\\
-4az+7az &= a^2 && \text{Trasponemos términos}\\
3az &= a^2 && \text{Reducimos términos semejantes}\\
z &= \frac{a^2}{3a} && \text{Despejamos } z\text{, teniendo en cuenta que } a \neq 0\\
z &= \frac{a}{3} && \text{Simplificamos.}
\end{aligned}$$

Luego, $z=\dfrac{a}{3}$, con $a \neq 0$, es la solución de la ecuación.

Verificamos que $z=\dfrac{a}{3}$ satisface la ecuación reemplazando z por $\dfrac{a}{3}$ en la ecuación original:

$$\left(\frac{a}{3}-a\right)^2-\left(\frac{a}{3}+a\right)^2=a\left(a-7\left(\frac{a}{3}\right)\right).$$

Después de realizar operaciones obtenemos $\dfrac{-4a^2}{3}=\dfrac{-4a^2}{3}$.

3. $$\begin{aligned}
m(n-y)-m(n-1) &= m(my-a) && \text{Ecuación dada}\\
mn-my-mn+m &= m^2y-ma && \text{Realizamos operaciones en ambos miembros}\\
m+ma &= m^2y+my && \text{Reducimos términos semejantes y trasponemos términos}\\
m(1+a) &= my(m+1) && \text{Factorizamos en ambos miembros}\\
\frac{m(1+a)}{m(m+1)} &= y && \text{Despejamos } y \text{ teniendo en cuenta que } m\neq 0 \text{ y } m \neq -1\\
y &= \frac{1+a}{1+m} && \text{Simplificamos.}
\end{aligned}$$

Luego, $y=\dfrac{1+a}{1+m}$, con $m \neq 0$ y $m \neq -1$, es la solución de la ecuación dada.

Verificamos que $y=\dfrac{1+a}{1+m}$ satisface la ecuación, reemplazando y por $\dfrac{1+a}{1+m}$ en la ecuación original:

$$m\left(n-\frac{1+a}{1+m}\right)-m(n-1)=m\left(m\left(\frac{1+a}{1+m}\right)-a\right).$$

Realizamos operaciones y obtenemos $\dfrac{-ma+m^2}{1+m}=\dfrac{m^2-ma}{1+m}$.

Ejemplo 57.2

En cada numeral, hallar la solución de la ecuación dada.

1. $\dfrac{x-3a}{a^2} - \dfrac{2a-x}{ab} = -\dfrac{1}{a}$, con a, b constantes y $a \neq 0$, $b \neq 0$.
2. $\dfrac{x+m}{x-n} = \dfrac{n+x}{m+x}$, con m y n constantes.

Solución

1. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador de los denominadores a^2b y simplificando, para eliminar los denominadores, obtenemos:

   $$b(x-3a) - a(2a-x) = -ab.$$

   Resolvamos esta ecuación:

   $$\begin{aligned} bx - 3ab - 2a^2 + ax &= -ab && \text{Realizamos operaciones}\\ bx + ax &= -ab + 3ab + 2a^2 && \text{Trasponemos términos}\\ bx + ax &= 2ab + 2a^2 && \text{Reducimos términos semejantes}\\ (b+a)x &= 2a(b+a) && \text{Factor común en cada miembro}\\ x &= 2a && \text{Dividimos ambos miembros entre } b+a, \text{ con } b \neq -a. \end{aligned}$$

   Luego, $x = 2a$, con $a \neq 0$, es la solución de la ecuación original.

   Verificamos que $x = 2a$ satisface la ecuación, sustituyendo x por $2a$ en la ecuación original:

   $$\frac{2a-3a}{a^2} - \frac{2a-2a}{ab} = -\frac{1}{a}.$$

   Realizamos operaciones y obtenemos $-\dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{a}$.

2. Debemos tener en cuenta que $x \neq n$ y $x \neq -m$, ya que estos valores hacen 0 los denominadores.

   Multipliquemos ambos miembros de la ecuación por $(x-n)(x+m)$ que es el mínimo común de los denominadores y simplifiquemos, para eliminar los denominadores:

   $$(x+m)^2 = (n+x)(x-n).$$

   Resolvamos esta ecuación

   $$\begin{aligned} x^2 + 2mx + m^2 &= x^2 - n^2 && \text{Realizamos operaciones}\\ 2mx &= -m^2 - n^2 && \text{Trasponemos términos}\\ x &= -\frac{m^2+n^2}{2m} && \text{Dividimos ambos miembros entre } 2m, \text{ con } m \neq 0. \end{aligned}$$

   Luego, $x = -\dfrac{m^2+n^2}{2m}$, con $m \neq 0$, es la solución de la ecuación original.

Verificamos que este valor de x satisface la ecuación reemplazando x por $-\dfrac{m^2+n^2}{2m}$ en la ecuación original:

$$\frac{-\dfrac{m^2+n^2}{2m}+m}{-\dfrac{m^2+n^2}{2m}-n}=\frac{n-\dfrac{m^2+n^2}{2m}}{m-\dfrac{m^2+n^2}{2m}}.$$

Realizando operaciones obtenemos $\dfrac{n-m}{n+m}=\dfrac{n-m}{n+m}$.

Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones, si a y b son constantes:

1. $ax+b^2=a^2-bx$.
2. $x\,(a+b)-3-a\,(a-2)=2\,(x-1)-x\,(a-b)$.
3. $\dfrac{4x}{2a+b}-3=-\dfrac{3}{2}$.
4. $\dfrac{5y+a}{3y+b}=\dfrac{5y-b}{3y-a}$.
5. $\dfrac{1}{z+a}+\dfrac{z^2}{a^2+az}=\dfrac{z+a}{a}$.

Respuestas

1. $x=a-b$, con $\quad a\neq -b$.
2. $x=\dfrac{a-1}{2}$, con $\quad a\neq 1$.
3. $x=\dfrac{6a+3b}{2}$, con $\quad b\neq -2a$.
4. $y=\dfrac{b-a}{2}$, con $\quad b\neq -a$.
5. $z=\dfrac{1-a}{2}$, con $\quad a\neq 0$.

Lección 58

Radicales

En esta lección estudiaremos el significado de expresiones de la forma $\sqrt[n]{b}$, con n un número natural, aprenderemos a realizar operaciones entre ellas y a simplificar las expresiones algebraicas que las contengan.

En las lecciones 2 y 3 consideramos las potencias de un número dado. Por ejemplo,

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \quad , \quad 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \quad , \quad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \quad , \cdots$

Ahora, dado un número, nos interesa hallar otro tal que cierta potencia de él sea igual al número dado.

Raíz cuadrada

Cuando consideramos, por ejemplo, el número 9, un número positivo que elevado al cuadrado nos da 9 es 3, porque $3^2 = 9$. Se utiliza la notación $\sqrt[2]{9}$ o también $\sqrt{9}$ para representar este número positivo. Es decir,

$$\sqrt{9} = 3 \text{ ya que } 3^2 = 9 \text{ y } 3 \text{ es positivo.}$$

$\sqrt{9}$ se lee raíz cuadrada principal de 9 o simplemente raíz cuadrada de 9.

En general,

Si b es un número positivo,
$\sqrt{b} = a$ significa que $a^2 = b$ y a es positivo.

$\sqrt{b}$ se lee **raíz cuadrada principal** de b o simplemente **raíz cuadrada** de b.

Observamos que si b es positivo y $a^2 = b$, entonces también $(-a)^2 = b$. Así, si b es positivo hay dos números, uno positivo y el otro negativo, que tienen como cuadrado a b. $\sqrt{b}$ representa únicamente al positivo.

Ejemplo 58.1

1. $\sqrt{4} = 2$ puesto que $2^2 = 4$ y 2 es positivo.
2. $\sqrt{16} = 4$ puesto que $4^2 = 16$ y 4 es positivo.

3. $\sqrt{\dfrac{36}{25}} = \dfrac{6}{5}$ puesto que $\left(\dfrac{6}{5}\right)^2 = \dfrac{36}{25}$ y $\dfrac{6}{5}$ es positivo.

Si $b = 0$, el único número a tal que $a^2 = 0$ es $a = 0$. Expresamos ésto escribiendo $\sqrt{0} = 0$. Así,

$$\sqrt{0} = 0 \;\text{ significa que }\; 0^2 = 0.$$

Por último, observamos que si b es un número negativo, no hay un número a tal que $a^2 = b$. ¿Por qué?

Así que,

$$\boxed{\text{La expresión } \sqrt{b} \text{ tiene sentido sólo cuando } b \text{ es positivo o es cero.}}$$

Ejemplo 58.2

$\sqrt{-25}$ no está definido, porque no hay un número real a tal que $a^2 = -25$.

Raíz cúbica

Si consideramos, por ejemplo, el número 8, el único número que elevado al cubo da 8 es 2. Se emplea la notación $\sqrt[3]{8}$ para representar ese número. Es decir,

$$\sqrt[3]{8} = 2 \;\text{ significa que }\; 2^3 = 8.$$

Similarmente,

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \;\text{ significa que }\; (-2)^3 = -8.$$

$$\sqrt[3]{0} = 0 \;\text{ significa que }\; 0^3 = 0.$$

En general, dado cualquier número b (positivo, cero o negativo) hay un único número a tal que

$$a^3 = b.$$

Ese único número se denota $\sqrt[3]{b}$, que se lee **raíz cúbica principal** de b o simplemente **raíz cúbica** de b. Así,

$$\boxed{\sqrt[3]{b} = a \text{ significa que } a^3 = b}$$

En este caso $\sqrt[3]{b}$ es positivo si b es positivo, es negativo si b es negativo y es 0 si b es 0.

Ejemplo 58.3

1. $\sqrt[3]{64} = 4$ puesto que $4^3 = 64$.
2. $\sqrt[3]{-64} = -4$ puesto que $(-4)^3 = -64$.
3. $\sqrt[3]{\dfrac{64}{27}} = \dfrac{4}{3}$ puesto que $\left(\dfrac{4}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{27}$.

Raíz n-ésima

Sea n un entero positivo mayor o igual que 2, es decir, $n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$.

Dado un número b, nos interesan los números a tales que

$$a^n = b.$$

Es necesario considerar, por separado, los casos n par y n impar:

- Si n es par y b es positivo, hay un único número positivo a tal que $a^n = b$. Ese único número positivo se representa como $\sqrt[n]{b}$, que se lee **raíz n-ésima principal** de b o simplemente **raíz n-ésima** de b. Así,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Para } n \text{ par y } b \text{ positivo,}\\ \sqrt[n]{b} = a \text{ significa que } a^n = b \text{ y } a \text{ es positivo.}\end{array}}$$

  Por ejemplo,

$$\sqrt[4]{16} = 2 \text{ puesto que } 2^4 = 16 \text{ y } 2 \text{ es positivo.}$$

  Observamos que $2^4 = 16$ y $(-2)^4 = 16$, pero $\sqrt[4]{16}$ representa únicamente al número positivo 2.

  Nótese que si n es par, pero b es negativo, no hay un número a tal que $a^n = b$.

  Por ejemplo, tomando $n = 4$ y $b = -16$, no hay un número a tal que $a^4 = -16$.

  Todo lo anterior es como en el caso $n = 2$, es decir, como en la raíz cuadrada.

- Si n es impar y b es cualquier número, hay un único número a tal que $a^n = b$. Ese único número se representa como $\sqrt[n]{b}$, que se lee como en el caso anterior.

  Así,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Para } n \text{ impar y } b \text{ cualquier número,}\\ \sqrt[n]{b} = a \text{ significa que } a^n = b.\end{array}}$$

  Por ejemplo,

  $\sqrt[5]{32} = 2$, puesto que $2^5 = 32$.

  $\sqrt[5]{-32} = -2$, puesto que $(-2)^5 = -32$.

  En este caso $\sqrt[n]{b}$ es positivo si b es positivo y es negativo si b lo es.

  Esta situación es como en el caso $n = 3$, es decir, como en la raíz cúbica.

- Si $b = 0$ y n es par o impar, el único número a tal que $a^n = 0$ es $a = 0$. Expresamos ésto escribiendo $\sqrt[n]{0} = 0$. Así,

$$\sqrt[n]{0} = 0 \ \text{ significa que } \ 0^n = 0.$$

  Por ejemplo, $\sqrt[4]{0} = \sqrt[5]{0} = 0$.

Observamos que,

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt[n]{b} \text{ está definida para todo número } b \text{ si } n \text{ es impar} \\ \text{y sólo está definida para } b \text{ positivo o cero si } n \text{ es par.}\end{array}}$$

Ejemplo 58.4

1. $\sqrt[4]{625} = 5$ ya que $5^4 = 625$ y 5 es positivo.
2. $\sqrt[4]{-16}$ no está definida porque no hay un número a tal que $a^4 = -16$.

Notas:

- Si n es un entero positivo y b es una expresión algebraica, $\sqrt[n]{b}$ se llama **expresión radical**, o simplemente **radical**, b se llama **radicando** o **expresión subradical** y n es el **índice del radical**. Al símbolo $\sqrt{\ }$ se le llama **signo radical**. ,
- Si $\sqrt[n]{b}$ está definida, se cumple que:
  1. Por definición,
  $$\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b.$$
  2. Si n es **impar** y b es cualquier número real,
  $$\sqrt[n]{b^n} = b.$$
  3. Si n es **par** y b es un número **positivo**,
  $$\sqrt[n]{b^n} = b.$$

Estos últimos tres resultados nos permiten simplificar y hallar el valor de algunas expresiones radicales, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 58.5

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7 \qquad \sqrt{7^2} = 7 \qquad \left(\sqrt[3]{64}\right)^3 = 64$$

$$\left(\sqrt[4]{81}\right)^4 = 81 \qquad \sqrt[3]{3^3} = 3 \qquad \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$$

$$\left(\sqrt[5]{-32}\right)^5 = -32 \qquad \sqrt[6]{2^6} = 2 \qquad \sqrt[3]{(-5)^3} = -5.$$

Si n es par y b es un número negativo, $\sqrt[n]{b^n} \neq b$. Por ejemplo,

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2 \neq -2 \ , \ \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7 \neq -7 \ , \ \sqrt[4]{(-5)^4} = \sqrt[4]{625} = 5 \neq -5.$$

Ejemplo 58.6

En cada numeral, hallar el valor de la expresión radical. Suponer que todas las variables representan números positivos.

1. $\sqrt{121x^2y^2}$.
2. $\sqrt[3]{512y^3}$.
3. $\sqrt[5]{32b^{10}}$
4. $\sqrt[6]{64x^{12}y^6}$.
5. $\left(\sqrt[4]{x^6y^4}\right)^4$.

Solución

1. $\sqrt{121x^2y^2} = \sqrt{(11)^2x^2y^2} = \sqrt{(11xy)^2} = 11xy$, porque $11xy$ es positivo.
2. $\sqrt[3]{512y^3} = \sqrt[3]{8^3y^3} = \sqrt[3]{(8y)^3} = 8y$.
3. $\sqrt[5]{32b^{10}} = \sqrt[5]{2^5\left(b^2\right)^5} = \sqrt[5]{\left(2b^2\right)^5} = 2b^2$.
4. $\sqrt[6]{64x^{12}y^6} = \sqrt[6]{2^6\left(x^2\right)^6y^6} = \sqrt[6]{\left(2x^2y\right)^6} = 2x^2y$, porque $2x^2y$ es positivo.
5. $\left(\sqrt[4]{x^6y^4}\right)^4 = x^6y^4$.

Ejercicios propuestos

En cada numeral, hallar el valor de la expresión radical. Suponer que todas las variables representan números positivos.

1. $\sqrt[4]{81x^8}$.
2. $\sqrt[3]{\dfrac{27y^6}{125z^3}}$.
3. $\sqrt{\dfrac{144x^{10}}{49}}$.
4. $\sqrt[5]{-243x^{10}y^5}$.
5. $\left(\sqrt[6]{3^6x^9}\right)^6$.

Respuestas

1. $3x^2$.
2. $\dfrac{3y^2}{5z}$.
3. $\dfrac{12x^5}{7}$.

4. $-3x^2y$.
5. $729x^9$.

Lección 59

Simplificación de radicales

En esta lección aprenderemos a simplificar expresiones radicales, utilizando los conceptos y propiedades vistas en la lección anterior y aplicando las leyes de los radicales que veremos a continuación.

Leyes de los radicales

Sean m y n enteros positivos, a y b expresiones algebraicas tales que los radicales indicados están definidos. Entonces:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

   La raíz n-ésima de un producto es igual al producto de las raíces n-ésimas de cada uno de los factores.

2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$.

   La raíz n-ésima de un cociente es igual al cociente de las raíz n-ésima del numerador entre la raíz n-ésima del denominador.

3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

   La raíz m-ésima de la raíz n-ésima de una expresión algebraica es igual a un radical cuyo índice es el producto de los índices de los dos radicales y cuyo radicando es es la misma expresión algebraica.

Ejemplo 59.1

Usando las leyes de los radicales, hallar el valor de los siguientes radicales:

1. $\sqrt{(16)(25)}$.
2. $\sqrt[3]{(-64)(8)}$.
3. $\sqrt[3]{\dfrac{27}{125}}$.
4. $\sqrt{\sqrt{81}}$.
5. $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$.

Solución

1. $\sqrt{(16)(25)} = \sqrt{16}\,\sqrt{25} = 4 \cdot 5 = 20$ porque $4^2 = 16$ y $5^2 = 25$.

2. $\sqrt[3]{(-64)(8)} = \sqrt[3]{-64}\,\sqrt[3]{8} = (-4) \cdot (2) = -8$ porque $(-4)^3 = -64$ y $2^3 = 8$.

3. $\sqrt[3]{\dfrac{27}{125}} = \dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{3}{5}$ porque $3^3 = 27$ y $5^3 = 125$.

4. $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt[4]{81} = 3$ porque $3^4 = 81$.

5. $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{2^6} = 2$ porque 2 es un número positivo.

Simplificación de expresiones radicales

Una expresión radical está simplificada si cumple las siguientes condiciones:

- En el radicando el exponente de cada uno de sus factores primos y de las variables es menor que el índice del radical.
- El índice de la expresión radical está expresado tan pequeño como sea posible.
- No hay fracciones ni números negativos en el radicando, ni radicales en el denominador.

Para simplificar una expresión radical, o simplemente un radical, procedemos así:

1. Expresamos el coeficiente del radicando como el producto de sus factores primos.
2. Si el exponente de uno de estos factores primos o de una de las variables del radicando es mayor que el indice de la raíz y no es múltiplo de éste, se escribe como la suma de dos números, el primero de los cuales es el múltiplo más grande del índice de la raíz que sea menor que el exponente.
3. Aplicamos las leyes de los exponentes, las leyes de los radicales y los conceptos y propiedades estudiadas en la lección anterior.

Ejemplo 59.2

En cada numeral, simplificar el radical dado. Suponer que las letras o variables sólo representan números positivos.

1. $\sqrt{50}$
2. $\sqrt[3]{-144}$
3. $\sqrt{108x^6y^3}$
4. $\sqrt[4]{8x^6y^{10}z^3}$

Solución

1. $\sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2}$ Descomponiendo a 50 en sus factores primos, $50 = 5^2 \cdot 2$

$= \sqrt{5^2}\sqrt{2}$ Aplicando la ley de la raíz de un producto

$= 5\sqrt{2}$ Porque 5 es un número positivo.

Nota: Recordemos que $\sqrt[n]{a^n} = a$ si a es un número positivo o cero.

2. $\sqrt[3]{-144} = \sqrt[3]{-2^4 \cdot 3^2}$ Descomponemos 144 en sus factores primos, $144 = 2^4 \cdot 3^2$

$= \sqrt[3]{-2^{3+1} \cdot 3^2}$ Escribimos el exponente 4 como $4 = 3 + 1$

$= \sqrt[3]{-2^3 \cdot 2^1 \cdot 3^2}$ Aplicamos leyes de los exponentes

$= \sqrt[3]{(-2)^3\,(2^1 \cdot 3^2)}$ $-2^3 = (-2)^3$ y agrupamos los factores con exponente menor que el índice de la raíz

$= \sqrt[3]{(-2)^3}\,\sqrt[3]{18}$ Aplicamos la ley de la raíz de un producto

$= -2\sqrt[3]{18}$ $\sqrt[3]{a^3} = a$ si a es cualquier número.

3. $\sqrt{108x^6y^3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3x^6y^3}$ Descomponemos 108 en sus factores primos

$= \sqrt{2^2 \cdot 3^{2+1}x^6y^{2+1}}$ Escribimos el exponente 3 como $3 = 2 + 1$

$= \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3(x^3)^2y^2y}$ Aplicamos leyes de los exponentes

$= \sqrt{2^2 \cdot 3^2(x^3)^2y^2(3y)}$ Agrupamos los factores con exponente menor que el índice

$= \sqrt{2^2}\,\sqrt{3^2}\,\sqrt{(x^3)^2}\,\sqrt{y^2}\,\sqrt{3y}$ Aplicamos ley de la raíz de un producto

$= 2 \cdot 3 \cdot x^3 \cdot y \cdot \sqrt{3y}$ Porque $\sqrt{a^2} = a$ si a es un número positivo o cero.

$= 6x^3y\sqrt{3y}.$

4. $\sqrt[4]{8x^6y^{10}z^3} = \sqrt[4]{2^3x^6y^{10}z^3}$ Descomponemos 8 en sus factores primos

$= \sqrt[4]{2^3x^{4+2}y^{8+2}z^3}$ Escribimos el exponente 6 como $6 = 4 + 2$ y el exponente 10 como $8 + 2$

$= \sqrt[4]{2^3x^4x^2(y^2)^4y^2z^3}$ Aplicamos leyes de los exponentes

$= \sqrt[4]{(2^3x^2y^2z^3)\,x^4(y^2)^4}$ Agrupamos los factores con exponente menor que el índice del radical

$= \sqrt[4]{2^3x^2y^2z^3}\,\sqrt[4]{x^4}\,\sqrt[4]{(y^2)^4}$ Aplicamos la ley de la raíz de un producto

$= \sqrt[4]{8x^2y^2z^3} \cdot x \cdot y^2$ Porque x sólo toma valores positivos

$= xy^2\sqrt[4]{8x^2z^3}$ Organizamos la expresión resultante.

Cuando los factores del radicando y el índice de la expresión radical tienen un factor común, la expresión radical se puede transformar en otra de menor índice utilizando la tercera ley de los radicales. Ilustremóslo con un ejemplo.

Ejemplo 59.3

Suponiendo que las variables sólo representan números positivos, simplificar los siguientes radicales:

1. $\sqrt[6]{36x^2y^4}$.
2. $\sqrt[4]{64x^2y^8}$.
3. $\sqrt[10]{32x^{10}y^{15}}$.

Solución

1.
$$\begin{aligned}
\sqrt[6]{36x^2y^4} &= \sqrt[6]{6^2x^2y^4} && \text{Los exponentes del radicando y el índice tienen factor común 2}\\
&= \sqrt[6]{(6xy^2)^2} && \text{Aplicamos leyes de los exponentes}\\
&= \sqrt[3]{\sqrt{(6xy^2)^2}} && \text{Aplicamos la ley 3. de radicales}\\
&= \sqrt[3]{6xy^2} && \text{Porque } x \text{ y } y \text{ son positivos.}
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{64x^2y^8} &= \sqrt[4]{2^6x^2y^8}\\
&= \sqrt[4]{2^4 2^2x^2(y^2)^4}\\
&= \sqrt[4]{2^4}\,\sqrt[4]{2^2x^2}\,\sqrt[4]{(y^2)^4}\\
&= 2\sqrt[4]{2^2x^2}\cdot y^2 && \text{Los exponentes y el índice tienen factor común 2}\\
&= 2y^2\sqrt[4]{(2x)^2}\\
&= 2y^2\sqrt{\sqrt{(2x)^2}} && \text{Aplicamos la ley 3. de radicales}\\
&= 2y^2\sqrt{2x} && \text{Porque } 2x \text{ es positivo.}
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
\sqrt[10]{32x^{10}y^{15}} &= \sqrt[10]{2^5x^{10}y^{10+5}}\\
&= \sqrt[10]{(2^5y^5)\,x^{10}y^{10}}\\
&= \sqrt[10]{(2^5y^5)}\,\sqrt[10]{x^{10}}\,\sqrt[10]{y^{10}} && \text{Aplicamos la ley 1. de radicales}\\
&= \sqrt[10]{(2^5y^5)}\cdot x\cdot y && \text{Porque } x \text{ y } y \text{ son positivos}\\
&= xy\,\sqrt[10]{(2y)^5} && \text{Los exponentes y el índice tienen factor común 5}
\end{aligned}$$

$$= xy\sqrt{\sqrt[5]{(2y)^5}} \quad \text{Aplicamos la ley 3. de radicales}$$

$$= xy\sqrt{2y}.$$

Ejercicios propuestos

Suponiendo que las variables sólo representan números positivos, simplificar los siguientes radicales:

1. $\sqrt{147x^7y^5}$.
2. $\sqrt[5]{96x^8y^{15}}$.
3. $\sqrt[6]{27x^3y^9}$.
4. $\sqrt[3]{-24y^9z^3}$.
5. $\sqrt[4]{\sqrt{4x^2y^4}}$.

Respuestas

1. $7x^3y^2\sqrt{3xy}$.
2. $2xy^3\sqrt[5]{3x^3}$.
3. $y\sqrt{3xy}$.
4. $-2\sqrt[3]{3}y^3z$.
5. $\sqrt[4]{2xy^2}$.

Lección 60

Suma y resta de radicales

En esta lección trabajaremos las operaciones de suma y resta de expresiones radicales.

Iniciaremos con el concepto de radicales semejantes.

Dos o más radicales son **semejantes** si tienen el mismo índice y el mismo radicando o expresión subradical.

Por ejemplo, $5\sqrt{5}$, $-3\sqrt{5}$ y $\dfrac{1}{2}\sqrt{5}$ son radicales semejantes porque tienen el mismo índice 2 y el mismo radicando 5.

$\sqrt[3]{2}$ y $4\sqrt[3]{3}$ no son radicales semejantes porque, aunque tienen el mismo índice, difieren en el radicando.

Ejemplo 60.1

Determinar si los siguientes radicales son semejantes:

1. $\sqrt{8}$, $\sqrt{32}$ y $\sqrt{2}$.
2. $\sqrt[3]{32}$ y $\sqrt[3]{54}$.

Solución

1. Simplifiquemos los primeros dos radicales. Descomponiendo 8 y 32 en sus factores primos obtenemos $8 = 2^3$ y $32 = 2^5$ y así:

   $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

   $\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = \sqrt{(2^2)^2\sqrt{2}} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

   Luego, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ son radicales semejantes.

2. Como $32 = 2^5$ y $54 = 2 \cdot 3^3$, simplificando los radicales tenemos:

   $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$.

   $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{2} \cdot 3 = 3\sqrt[3]{2}$.

   Luego, $\sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}$ y $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$ no son radicales semejantes.

Para sumar o restar radicales primero se simplifican y luego se reducen los radicales semejantes, aplicando las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la suma y producto de números reales.

Ejemplo 60.2

Efectuar las operaciones indicadas:

1. $\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + \sqrt{48}$.
2. $\sqrt{125} + 2\sqrt{5} - \sqrt{45} + 3\sqrt{80}$
3. $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{2}$.
4. $\sqrt{18} + \sqrt[3]{128} + \sqrt{8} - \sqrt[3]{54}$.

Solución

1. Primero simplifiquemos los radicales:

   $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

   $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = \sqrt{3}\sqrt{5^2} = \sqrt{3} \cdot 5 = 5\sqrt{3}$.

   $\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = \sqrt{(2^2)^2}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

   Luego reducimos radicales semejantes:

$$\begin{aligned}\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + \sqrt{48} &= 2\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \\ &= (2 - 10 + 4)\sqrt{3} \\ &= -4\sqrt{3}.\end{aligned}$$

2. Como $125 = 5^3$, $45 = 3^2 \cdot 5$ y $80 = 2^4 \cdot 5$, simplifiquemos los radicales:

   $\sqrt{125} = \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2 \cdot 5} = \sqrt{5^2}\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$.

   $\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{3^2}\,\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

   $\sqrt{80} = \sqrt{2^4 \cdot 5} = \sqrt{(2^2)}\sqrt{5} = 2^2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

   Luego,

$$\begin{aligned}\sqrt{125} + 2\sqrt{5} - \sqrt{45} + 3\sqrt{80} &= 5\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 12\sqrt{5} \\ &= (5 + 2 - 3 + 12)\sqrt{5} \\ &= 16\sqrt{5}.\end{aligned}$$

3. Simplifiquemos los radicales:

   $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$.

   $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 2} = \sqrt[3]{(2^2)^3}\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$.

   Luego,

$$\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}$$

$$= (2-4+1)\sqrt[3]{2}$$
$$= -\sqrt[3]{2}.$$

4. $\sqrt{18}+\sqrt[3]{128}+\sqrt{8}-\sqrt[3]{54} = \sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt[3]{2^7}+\sqrt{2^3}-\sqrt[3]{2\cdot 3^3}$
$$= \sqrt{2}\sqrt{3^2}+\sqrt[3]{2^6}\sqrt[3]{2}+\sqrt{2^2}\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3^3}$$
$$= 3\sqrt{2}+4\sqrt[3]{2}+2\sqrt{2}-3\sqrt[3]{2}$$
$$= (3+2)\sqrt{2}+(4-3)\sqrt[3]{2}$$
$$= 5\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}.$$

Ejemplo 60.3

Suponiendo que las letras o variables sólo representan números positivos, simplificar:

1. $\sqrt{4a^2b}-\sqrt{25ab^2}+\sqrt{a^2b}+\sqrt{16ab^2}$.
2. $\sqrt{3ab}-\sqrt[4]{9a^2b^2}+\sqrt[6]{27a^3b^3}$.
3. $\sqrt[3]{xy}+\sqrt[4]{9x^2y^2}+\sqrt[3]{27x^4y^4}-\sqrt{27x^3y^3}$.

Solución

1. $\sqrt{4a^2b}-\sqrt{25ab^2}+\sqrt{a^2b}+\sqrt{16ab^2} = \sqrt{2^2a^2b}-\sqrt{5^2ab^2}+\sqrt{a^2b}+\sqrt{2^4ab^2}$
$$= \sqrt{(2a)^2}\sqrt{b}-\sqrt{(5b)^2}\sqrt{a}+\sqrt{a^2}\sqrt{b}+\sqrt{(2^2b)^2}\sqrt{a}$$
$$= 2a\sqrt{b}-5b\sqrt{a}+a\sqrt{b}+4b\sqrt{a}$$
$$= (2a+a)\sqrt{b}+(-5b+4b)\sqrt{a}$$
$$= 3a\sqrt{b}-b\sqrt{a}.$$

2. $\sqrt{3ab}-\sqrt[4]{9a^2b^2}+\sqrt[6]{27a^3b^3} = \sqrt{3ab}-\sqrt{\sqrt{3^2a^2b^2}}+\sqrt{\sqrt[3]{3^3a^3b^3}}$
$$= \sqrt{3ab}-\sqrt{\sqrt{(3ab)^2}}+\sqrt{\sqrt[3]{(3ab)^3}}$$
$$= \sqrt{3ab}-\sqrt{3ab}+\sqrt{3ab}$$
$$= \sqrt{3ab}.$$

3. Como $\sqrt[3]{xy}$ está simplificado, simplifiquemos los tres últimos radicales:

$$\sqrt[4]{9x^2y^2} = \sqrt{\sqrt{3^2x^2y^2}} = \sqrt{\sqrt{(3xy)^2}} = \sqrt{3xy}.$$
$$\sqrt[3]{27x^4y^4} = \sqrt[3]{3^3x^3xy^3y} = \sqrt[3]{(3xy)^3xy} = \sqrt[3]{(3xy)^3}\sqrt[3]{xy} = 3xy\sqrt[3]{xy}.$$
$$\sqrt{27x^3y^3} = \sqrt{3^3x^3y^3} = \sqrt{(3^2x^2y^2)3xy} = \sqrt{(3xy)^2}\sqrt{3xy} = 3xy\sqrt{3xy}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{xy}+\sqrt[4]{9x^2y^2}+\sqrt[3]{27x^4y^4}-\sqrt{27x^3y^3}&=\sqrt[3]{xy}+\sqrt{3xy}+3xy\sqrt[3]{xy}-3xy\sqrt{3xy}\\&=(1+3xy)\sqrt[3]{xy}+(1-3xy)\sqrt{3xy}.\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

Suponiendo que las variables sólo representan números positivos, simplificar:

1. $\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{5}$.
2. $\frac{1}{2}\sqrt{12}-\frac{1}{3}\sqrt{18}+\frac{3}{4}\sqrt{48}+\frac{1}{6}\sqrt{72}$.
3. $3\sqrt[3]{-24}-4\sqrt[3]{-81}-\sqrt[3]{-375}$.
4. $\sqrt{2x^3y}-\sqrt{x^3y^2}+\sqrt{18xy^5}+\sqrt{x^5y^0}$.
5. $\sqrt[3]{ab^3}+\sqrt{4a^3b}+\sqrt{9a^3b^3}$.

Respuestas

1. $4\sqrt[3]{5}$.
2. $4\sqrt{3}$.
3. $11\sqrt[3]{3}$.
4. $(x+3y^2)\sqrt{2xy}+(x^2-xy)\sqrt{x}$.
5. $a(3b+2)\sqrt{ab}+b\sqrt[3]{a}$.

Lección 61

Multiplicación de radicales

En esta lección aprenderemos a multiplicar expresiones radicales.

De la primera ley de los radicales sabemos que si m y n son enteros positivos y a y b expresiones algebraicas tales que los radicales indicados están definidos, entonces

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}.$$

Si consideramos esta igualdad de derecha a izquierda tenemos que

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

Es decir, el producto de dos radicales del mismo índice es igual a un radical del mismo índice cuyo radicando es el producto de los radicandos de las expresiones radicales dadas.

Este resultado es válido también para el producto de tres o más radicales del mismo índice.

Ejemplo 61.1

En cada numeral, efectuar los productos de radicales y simplificar.

1. $\sqrt{15}\,\sqrt{27}$.
2. $\sqrt[5]{48}\,\sqrt[5]{20}$.
3. $5\sqrt{12} \cdot 3\sqrt{75}$.
4. $\dfrac{1}{2}\sqrt{21} \cdot \dfrac{2}{3}\sqrt{42} \cdot \dfrac{3}{7}\sqrt{22}$.
5. $\left(3\sqrt{7} - 2\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{3} + 4\sqrt{7}\right)$.

Solución

1. $$\begin{aligned} \sqrt{15}\,\sqrt{27} &= \sqrt{(15)(27)} \\ &= \sqrt{(3 \cdot 5)\left(3^3\right)} \\ &= \sqrt{3^4 \cdot 5} \\ &= \sqrt{\left(3^2\right)^2}\sqrt{5} \\ &= 3^2\sqrt{5} \\ &= 9\sqrt{5}. \end{aligned}$$

2. $\sqrt[5]{48}\,\sqrt[5]{20} = \sqrt[5]{(48)(20)}$

$$= \sqrt[5]{(2^4 \cdot 3)\,(2^2 \cdot 5)}$$
$$= \sqrt[5]{2^6 \cdot 3 \cdot 5}$$
$$= \sqrt[5]{2^5}\,\sqrt[5]{2 \cdot 3 \cdot 5}$$
$$= 2\sqrt[5]{30}.$$

Observemos que en el segundo paso de la solución de los ejemplos anteriores, antes de realizar el producto de los dos factores del radicando, los estamos descomponiendo en sus factores primos, lo que facilita la simplificación del resultado.

3. $5\sqrt{12} \cdot 3\sqrt{75} = (5 \cdot 3)\,\sqrt{12}\sqrt{75}$

$$= 15\sqrt{(12)(75)}$$
$$= 15\sqrt{(2^2 \cdot 3)\,(3 \cdot 5^2)}$$
$$= 15\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$$
$$= 15\sqrt{(2 \cdot 3 \cdot 5)^2}$$
$$= 15\sqrt{(30)^2}$$
$$= 15(30)$$
$$= 450.$$

4. $\dfrac{1}{2}\sqrt{21} \cdot \dfrac{2}{3}\sqrt{42} \cdot \dfrac{3}{7}\sqrt{22} = \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{7}\right)\sqrt{(21)(42)(22)}$

$$= \frac{1}{7}\sqrt{(3 \cdot 7)(2 \cdot 3 \cdot 7)(2 \cdot 11)}$$
$$= \frac{1}{7}\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11}$$
$$= \frac{1}{7}\sqrt{(2 \cdot 3 \cdot 7)^2 \cdot 11}$$
$$= \frac{1}{7}\sqrt{(42)^2}\,\sqrt{11}$$
$$= \frac{1}{7} \cdot 42\sqrt{11}$$
$$= 6\sqrt{11}.$$

5. $\left(3\sqrt{7} - 2\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{3} + 4\sqrt{7}\right) = 15\sqrt{7}\sqrt{3} + 12\left(\sqrt{7}\right)^2 - 10\left(\sqrt{3}\right)^2 - 8\sqrt{3}\sqrt{7}$

$$= 15\sqrt{21} + 12\,(7) - 10\,(3) - 8\sqrt{21}$$
$$= 84 - 30 + (15 - 8)\,\sqrt{21}$$
$$= 54 + 7\sqrt{21}.$$

Ejemplo 61.2

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar, suponiendo que las letras o variables sólo representan números positivos.

1. $\sqrt[3]{9xy}\,\sqrt[3]{6x^2y^4}$.

2. $\sqrt[5]{24xy^3}\,\sqrt[5]{36x^2y^2}$.

3. $3\sqrt[4]{45x^3y^5}\cdot 2\sqrt[4]{72x^2y^3}$.

4. $\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}\right)\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}\right)$.

Solución

1. $$\begin{aligned}\sqrt[3]{9xy}\,\sqrt[3]{6x^2y^4} &= \sqrt[3]{(9xy)\,(6x^2y^4)}\\ &= \sqrt[3]{9\cdot 6\cdot xyx^2y^4}\\ &= \sqrt[3]{3^2\cdot 2\cdot 3\cdot x^3y^5}\\ &= \sqrt[3]{3^3\cdot 2\cdot x^3y^3y^2}\\ &= \sqrt[3]{(3^3x^3y^3)\,(2y^2)}\\ &= \sqrt[3]{(3xy)^3}\,\sqrt[3]{(2y^2)}\\ &= 3xy\sqrt[3]{(2y^2)}.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\sqrt[5]{24xy^3}\,\sqrt[5]{36x^2y^2} &= \sqrt[5]{(24xy^3)\,(36x^2y^2)}\\ &= \sqrt[5]{(24)\,(36)\,xy^3x^2y^2}\\ &= \sqrt[5]{(2^3\cdot 3)\,(2^2\cdot 3^2)\,x^3y^5}\\ &= \sqrt[5]{2^5\cdot 3^3\cdot x^3y^5}\\ &= \sqrt[5]{(2^5y^5)\,(3^3x^3)}\\ &= \sqrt[5]{(2y)^5}\,\sqrt[5]{(3^3x^3)}\\ &= 2y\sqrt[5]{27x^3}.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}3\sqrt[4]{45x^3y^5}\cdot 2\sqrt[4]{72x^2y^3} &= 3\cdot 2\sqrt[4]{(45x^3y^5)\,(72x^2y^3)}\\ &= 6\sqrt[4]{(45)\,(72)\,x^3y^5x^2y^3}\\ &= 6\sqrt[4]{(3^2\cdot 5)\,(2^3\cdot 3^2)\,x^5y^8}\\ &= 6\sqrt[4]{2^3\cdot 3^4\cdot 5\cdot x^5y^8}\\ &= 6\sqrt[4]{(3^4x^4y^8)\,(2^3\cdot 5\cdot x)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 6\sqrt[4]{(3xy^2)^4}\sqrt[4]{40x} \\
&= 18xy^2\sqrt[4]{40x}.
\end{aligned}
$$

4. $$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}\right)\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}\right) &= \left(\sqrt{a+1}\right)^2-\left(\sqrt{a-1}\right)^2 \\
&= (a+1)-(a-1) \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

Si los radicales a multiplicar tienen distinto índice se convierten en radicales equivalentes que tengan el mismo índice y luego se multiplican.

Para hallar el índice común de los radicales se procede así: Descomponemos cada uno de los índices en sus factores primos y hallamos el **mínimo común índice** como el producto de los factores primos comunes y no comunes con el mayor exponente. Esto es, el mínimo común índice es el mínimo común múltiplo de los índices de los radicales dados.

Cada radical se convierte en un radical equivalente cuyo índice es el mínimo común índice y cuyo radicando es el radicando de la expresión radical original elevado al exponente cuyo valor es el resultado de dividir el mínimo común índice entre el índice del radical original.

Ejemplo 61.3

Suponiendo que las variables sólo representan números positivos efectuar, en cada numeral, los productos indicados y simplificar el resultado.

1. $\sqrt[3]{4x^2y}\,\sqrt{2xy}$.
2. $2\sqrt[3]{a^2b^2}\cdot 5\sqrt[4]{3a^3b^2}$.
3. $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{4x^2}\cdot\dfrac{3}{8}\sqrt[5]{16x^4y}$.

Solución

1. Los índices de los radicales son 3 y 2 respectivamente. El mínimo común índice es $2\cdot 3=6$. Ahora convertimos cada radical en uno equivalente que tenga índice 6, así:

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{4x^2y} &= \sqrt[6]{(4x^2y)^2} && \text{El mínimo común índice 6 dividido entre el índice del radical, que es 3, nos da } 6/3=2 \\
&= \sqrt[6]{4^2x^4y^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2xy} &= \sqrt[6]{(2xy)^3} && \text{El mínimo común índice 6 dividido entre el índice del radical, que es 2, nos da } 6/2=3 \\
&= \sqrt[6]{2^3x^3y^3}.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{4x^2y}\,\sqrt{2xy} &= \sqrt[6]{4^2x^4y^2}\,\sqrt[6]{2^3x^3y^3}\\
&= \sqrt[6]{(2^4x^4y^2)\,(2^3x^3y^3)}\\
&= \sqrt[6]{2^7x^7y^5}\\
&= \sqrt[6]{(2^6x^6)\,(2xy^5)}\\
&= \sqrt[6]{(2x)^6}\,\sqrt[6]{2xy^5}\\
&= 2x\sqrt[6]{2xy^5}.
\end{aligned}
$$

2. Los índices de los radicales son 3 y $4 = 2^2$ respectivamente. El mínimo común índice es $3 \cdot 2^2 = 12$. Ahora convertimos cada radical en uno equivalente que tenga índice 12, así:

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{a^2b^2} &= \sqrt[12]{(a^2b^2)^4} && \text{El mínimo común índice 12 dividido entre el índice del radical, que es 3, nos da } 12/3 = 4\\
&= \sqrt[12]{a^8b^8}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt[4]{3a^3b^2} &= \sqrt[12]{(3a^3b^2)^3} && \text{El mínimo común índice 12 dividido entre el índice del radical, que es 4, nos da } 12/4 = 3\\
&= \sqrt[12]{3^3a^9b^6}.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
2\sqrt[3]{a^2b^2}\cdot 5\sqrt[4]{3a^3b^2} &= 2\,\sqrt[12]{a^8b^8}\cdot 5\,\sqrt[12]{3^3a^9b^6}\\
&= 2\cdot 5\,\sqrt[12]{(a^8b^8)\,(3^3a^9b^6)}\\
&= 10\,\sqrt[12]{3^3a^{17}b^{14}}\\
&= 10\,\sqrt[12]{(a^{12}b^{12})\,(3^3a^5b^2)}\\
&= 10\,\sqrt[12]{(ab)^{12}}\,\sqrt[12]{3^3a^5b^2}\\
&= 10ab\,\sqrt[12]{3^3a^5b^2}\\
&= 10ab\,\sqrt[12]{27a^5b^2}.
\end{aligned}
$$

3. Los índices de los radicales son 3 y 5 respectivamente. El mínimo común índice es $3 \cdot 5 = 15$. Ahora convertimos cada radical en uno equivalente que tenga índice 15, así:

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{4x^2} &= \sqrt[15]{(4x^2)^5} && \text{El mínimo común índice 15 dividido entre el índice del radical, que es 3, nos da } 15/3 = 5\\
&= \sqrt[15]{(2^2)^5\,x^{10}}\\
&= \sqrt[15]{2^{10}x^{10}}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{16x^4y} &= \sqrt[15]{\left(16x^4y\right)^3} \quad \text{El mínimo común índice 15 dividido entre el índice del radical, que es 5, nos da } 15/5 = 3\\ &= \sqrt[15]{\left(2^4\right)^3 x^{12}y^3}\\ &= \sqrt[15]{2^{12}x^{12}y^3}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\sqrt[3]{4x^2}\cdot\frac{3}{8}\sqrt[5]{16x^4y} &= \frac{2}{3}\sqrt[15]{2^{10}x^{10}}\cdot\frac{3}{8}\sqrt[15]{2^{12}x^{12}y^3}\\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}\sqrt[15]{2^{10}x^{10}}\;\sqrt[15]{2^{12}x^{12}y^3}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt[15]{\left(2^{10}x^{10}\right)\left(2^{12}x^{12}y^3\right)}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt[15]{2^{22}x^{22}y^3}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt[15]{\left(2^{15}x^{15}\right)\left(2^7x^7y^3\right)}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt[15]{(2x)^{15}}\;\sqrt[15]{2^7x^7y^3}\\ &= \frac{1}{4}(2x)\;\sqrt[15]{2^7x^7y^3}\\ &= \frac{x}{2}\sqrt[15]{128x^7y^3}.\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

Suponiendo que las variables sólo representan números positivos, realizar los siguientes productos de radicales y simplificar:

1. $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{648}$.
2. $\sqrt{11x^3y^3}\,\sqrt{77xy^2}$.
3. $\sqrt[3]{10x^2y}\,\sqrt[6]{16x^5y^4}$.
4. $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}\right)$.
5. $2\sqrt[4]{25x^2y^3}\cdot 4\sqrt[6]{125x^2}$.

Respuestas

1. $6\sqrt[3]{6}$.
2. $11x^2y^2\sqrt{7y}$.
3. $2xy\sqrt[6]{25x^3}$.
4. $2+3x+3\sqrt{x^2+x}$.
5. $40\sqrt[12]{x^{10}y^9}$.

Lección 62

División de radicales

En esta lección aprenderemos a expresar el cociente de dos expresiones radicales como un solo radical y a simplificarlo.

De la segunda ley de los radicales sabemos que si m y n son enteros positivos y a y b expresiones algebraicas tales que los radicales indicados están definidos, entonces

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Si consideramos esta igualdad de derecha a izquierda tenemos que

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Este resultado nos dice que el cociente de dos radicales del mismo índice es igual a un radical del mismo índice cuyo radicando es el cociente de los radicandos de las expresiones radicales dadas.

Ejemplo 62.1

En cada numeral, efectuar el cociente de radicales y simplificar.

1. $\dfrac{2\sqrt{48}}{9\sqrt{3}}$.
2. $\dfrac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{1.458}}$.
3. $\dfrac{5\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{-125}}$.

Solución

1. $\dfrac{2\sqrt{48}}{9\sqrt{3}} = \dfrac{2}{9}\sqrt{\dfrac{48}{3}} = \dfrac{2}{9}\sqrt{16} = \dfrac{2}{9}\sqrt{4^2} = \dfrac{2}{9} \cdot 4 = \dfrac{8}{9}$.
2. $\dfrac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{1.458}} = \sqrt[6]{\dfrac{128}{1.458}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^7}{2 \cdot 3^6}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^6}{3^6}} = \sqrt[6]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^6} = \dfrac{2}{3}$.
3. $\dfrac{5\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{-125}} = 5\sqrt[3]{\dfrac{135}{-125}} = 5\sqrt[3]{\dfrac{3^3 \cdot 5}{(-5)^3}} = 5\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{-5}\right)^3}\sqrt[3]{5} = 5\left(-\dfrac{3}{5}\right)\sqrt[3]{5} = -3\sqrt[3]{5}$.

Ejemplo 62.2

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar, suponiendo que las letras o variables sólo representan números positivos.

1. $\dfrac{\sqrt[3]{54x^2y}}{\sqrt[3]{xy}}$.

2. $\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{27xy}}{\frac{3}{4}\sqrt{3x}}$.

3. $\dfrac{\sqrt{9x^4y^6}}{\sqrt{81x^{-2}y^2}}$.

4. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{8xy^2}}}{\sqrt[4]{128x^{-3}y}}$.

Solución

1. $\dfrac{\sqrt[3]{54x^2y}}{\sqrt[3]{xy}} = \sqrt[3]{\dfrac{54x^2y}{xy}} = \sqrt[3]{54x} = \sqrt[3]{2\cdot 3^3\cdot x} = 3\sqrt[3]{2x}.$

2. $\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{27xy}}{\frac{3}{4}\sqrt{3x}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{3^3xy}{3x}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3^2y} = \dfrac{2\cdot 3\sqrt{y}}{3} = 2\sqrt{y}.$

3. $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{9x^4y^6}}{\sqrt{81x^{-2}y^2}} &= \sqrt{\frac{9x^4y^6}{81x^{-2}y^2}}\\ &= \sqrt{\frac{3^2x^4y^6}{3^4x^{-2}y^2}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{3^2}x^6y^4}\\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{3}x^3y^2\right)^2}\\ &= \frac{1}{3}x^3y^2.\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\sqrt{8xy^2}}}{\sqrt[4]{128x^{-3}y}} &= \frac{\sqrt[4]{8xy^2}}{\sqrt[4]{128x^{-3}y}}\\ &= \sqrt[4]{\frac{2^3xy^2}{2^7x^{-3}y}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt[4]{\frac{x^4y}{2^4}} \\
&= \sqrt[4]{\left(\frac{x}{2}\right)^4}\sqrt[4]{y} \\
&= \frac{x}{2}\sqrt[4]{y}.
\end{aligned}
$$

Para dividir radicales de distinto índice se procede de forma similar a como se hizo en la multilplicación, esto es: se convierten numerador y denominador en radicales equivalentes de igual índice, tomando como índice común el mínimo común índice y luego se dividen como radicales de igual índice.

Ejemplo 62.3

En cada numeral, suponiendo que las variables sólo representan números positivos, efectuar los cocientes indicados y simplificar el resultado.

1. $\dfrac{\frac{1}{4}\sqrt[6]{16x^4}}{\frac{1}{2}\sqrt{2x}}$.
2. $\dfrac{2\sqrt[3]{3x^4}}{\sqrt[9]{27x^2}}$.
3. $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{625x^6y^7}}}{\sqrt[3]{5^{-2}x^3y}}$.

Solución

1. Los índices de los radicales son $6 = 2 \cdot 3$ y 2 respectivamente. El mínimo común índice es $2 \cdot 3 = 6$. Convertimos el denominador en un radical equivalente que tenga índice 6, así:

   $\sqrt{2x} = \sqrt[6]{(2x)^3} = \sqrt[6]{2^3x^3}$.

   Luego,

   $$
   \begin{aligned}
   \frac{\frac{1}{4}\sqrt[6]{16x^4}}{\frac{1}{2}\sqrt{2x}} &= \frac{\frac{1}{4}\sqrt[6]{16x^4}}{\frac{1}{2}\sqrt[6]{2^3x^3}} \\
   &= \frac{1}{2}\sqrt[6]{\frac{2^4x^4}{2^3x^3}} \\
   &= \frac{1}{2}\sqrt[6]{2x}.
   \end{aligned}
   $$

2. Los índices de los radicales son 3 y $9 = 3^2$ respectivamente. El mínimo común índice es $3^2 = 9$. Convertimos el numerador en un radical equivalente que tenga índice 9, así:

$\sqrt[3]{3x^4} = \sqrt[9]{(3x^4)^3} = \sqrt[9]{3^3x^{12}}$.

Luego,

$$\frac{2\sqrt[3]{3x^4}}{\sqrt[9]{27x^2}} = \frac{2\sqrt[9]{3^3x^{12}}}{\sqrt[9]{27x^2}}$$
$$= 2\sqrt[9]{\frac{3^3x^{12}}{3^3x^2}}$$
$$= 2\sqrt[9]{x^{10}}$$
$$= 2\sqrt[9]{x^9}\sqrt[9]{x}$$
$$= 2x\sqrt[9]{x}.$$

3. $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{625x^6y^7}}}{\sqrt[3]{5^{-2}x^3y}} = \dfrac{\sqrt[6]{625x^6y^7}}{\sqrt[3]{5^{-2}x^3y}}$.

Los índices de los radicales son $6 = 2 \cdot 3$ y 3 respectivamente. El mínimo común índice es $2 \cdot 3 = 6$. Convertimos el denominador en un radical equivalente que tenga índice 6, así:

$\sqrt[3]{5^{-2}x^3y} = \sqrt[6]{(5^{-2}x^3y)^2} = \sqrt[6]{5^{-4}x^6y^2}$.

Luego,

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{625x^6y^7}}}{\sqrt[3]{5^{-2}x^3y}} = \frac{\sqrt[6]{625x^6y^7}}{\sqrt[6]{5^{-4}x^6y^2}}$$
$$= \sqrt[6]{\frac{5^4x^6y^7}{5^{-4}x^6y^2}}$$
$$= \sqrt[6]{5^8y^5}$$
$$= \sqrt[6]{5^6}\sqrt[6]{5^2y^5}$$
$$= 5\sqrt[6]{25y^5}.$$

Ejercicios propuestos

Suponiendo que las variables sólo representan números positivos, realizar los siguientes cocientes de radicales y simplificar:

1. $\dfrac{\sqrt{6x^3y^5}}{\sqrt{8x^3y}}$.

2. $\dfrac{\sqrt[3]{-625x^8y^6}}{\sqrt[3]{5x^2y}}$.

3. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{256a^6b^9}}}{\sqrt{576ab}}$.

4. $\dfrac{\sqrt[4]{36x^3y^2}}{\sqrt[10]{81xy}}$.

Respuestas

1. $\dfrac{1}{2}y^2\sqrt{3}$.
2. $-5x^2y\sqrt[3]{y^2}$.
3. $\dfrac{1}{6}ab\sqrt[4]{b^3}$.
4. $\sqrt[20]{9.216\,x^{13}y^8}$.

Lección 63

Racionalización del denominador I

En esta lección aprenderemos a simplificar radicales cuyo radicando es una fracción y fracciones que tienen un radical en el denominador.

Recordemos que una las condiciones que debe cumplir una expresión radical para estar simplificada es que no tenga fracciones en el radicando.

Cuando en una expresión radical el radicando es una fracción debemos multiplicar numerador y denominador de la fracción por una expresión apropiada para obtener un radical sin fracciones en el radicando. Este procedimiento se conoce como **racionalización del denominador**.

Sabemos, por las propiedades de las fracciones, que si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican por una misma expresión, diferente de cero, la fracción no se altera y así al realizar este procedimiento el radicando no varía y por lo tanto el radical tiene el mismo valor.

Ilustremos este procedimiento con unos ejemplos.

Ejemplo 63.1

Suponiendo que las variables sólo representan números positivos, racionalizar el denominador en las siguientes expresiones radicales:

1. $\sqrt{\dfrac{1}{10}}$.
2. $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$.
3. $\sqrt[3]{\dfrac{54x^7}{y}}$.
4. $\sqrt[4]{\dfrac{3}{5x^2}}$.

Solución

1. Debemos multiplicar numerador y denominador de la fracción del radicando por 10 para tener un cuadrado perfecto en el denominador y, al aplicar las leyes de los radicales y

el hecho de que $\sqrt{a^2} = a$, obtener un radical sin fracciones en el radicando. Así,

$$\sqrt{\frac{1}{10}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 10}{10 \cdot 10}} \qquad \text{Multiplicamos numerador y denominador del radicando por 10}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10^2}} \qquad \text{Aplicamos leyes de los radicales}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{10} \qquad \text{Porque } \sqrt{10^2} = 10$$

$$= \frac{1}{10}\sqrt{10}.$$

2. En este caso, como tenemos un radical de índice 3 debemos multiplicar numerador y denominador del radicando por un número apropiado para obtener un cubo perfecto en el denominador, de tal manera que al aplicar el hecho de que $\sqrt[3]{a^3} = a$, obtengamos un radicando sin fracciones.

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2^2}{2 \cdot 2^2}} \qquad \text{Multiplicamos numerador y denominador del radicando por } 2^2$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2^2}{2^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{2^3}} \qquad \text{Aplicamos leyes de los radicales}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{12}}{2} \qquad \text{Porque } \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{12}.$$

3. Como tenemos un radical de índice 3 debemos multiplicar numerador y denominador del radicando por y^2 para obtener un cubo perfecto en el denominador.

$$\sqrt[3]{\frac{54x^7}{y}} = \sqrt[3]{\frac{54x^7 \cdot y^2}{y \cdot y^2}} \qquad \text{Multiplicamos numerador y denominador del radicando por } y^2$$

$$= \sqrt[3]{\frac{54x^7y^2}{y^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 3^3x^7y^2}}{\sqrt[3]{y^3}} \qquad \text{Aplicamos leyes de los radicales}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(3x^2)^3(2xy^2)}}{y} \qquad \text{Porque } \sqrt[3]{y^3} = y$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(3x^2)^3}\,\sqrt[3]{2xy^2}}{y} \qquad \text{Aplicamos leyes de los radicales en el numerador}$$

$$= \frac{3x^2\,\sqrt[3]{2xy^2}}{y} \qquad \text{Porque } \sqrt[3]{(3x^2)^3} = 3x^2$$

$$= \frac{3x^2}{y}\,\sqrt[3]{2xy^2}.$$

4. Para racionalizar el denominador multiplicamos numerador y denominador del radicando por 5^3x^2 que convierte el denominador en una potencia 4 de una expresión algebraica.

$$\sqrt[4]{\frac{3}{5x^2}} = \sqrt[4]{\frac{3\,(5^3x^2)}{5x^2\,(5^3x^2)}} \qquad \text{Multiplicamos numerador y denominador del radicando por } 5^3x^2$$

$$= \sqrt[4]{\frac{375x^2}{5^4x^4}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{375x^2}{(5x)^4}}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{375x^2}}{\sqrt[4]{(5x)^4}} \qquad \text{Aplicamos leyes de los radicales}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{375x^2}}{5x} \qquad \text{Porque } \sqrt[4]{(5x)^4} = 5x$$

$$= \frac{1}{5x}\sqrt[4]{375x^2}.$$

De manera similar procedemos si tenemos una fracción algebraica cuyo denominador es una expresión con radicales. Como en el caso anterior, racionalizar el denominador es multiplicar numerador y denominador de la fracción por una expresión apropiada para eliminar los radicales en el denominador de la fracción. Iniciemos en esta lección con fracciones cuyo denominador tiene un solo término.

Ejemplo 63.2

En cada numeral, suponiendo que las variables sólo representan números positivos, racionalizar el denominador.

1. $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

2. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

3. $\dfrac{x}{\sqrt[3]{4y}}$.

4. $\dfrac{50}{y\sqrt[4]{25x^3}}$.

5. $\dfrac{\sqrt[5]{64a^7}}{\sqrt[5]{2b}}$.

Solución

1. Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{5}$ y como $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ tenemos

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{5}.$$

2. Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[3]{x^2}$ para obtener $\sqrt[3]{x^3} = x$ en el denominador.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x} = \frac{2}{x}\sqrt[3]{x^2}.$$

3. Como el índice del radical en el denominador es 3 debemos multiplicar numerador y denominador por una expresión que convierta el radicando en un cubo perfecto y así poder obtener una fracción sin radicales en el denominador.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt[3]{4y}} &= \frac{x}{\sqrt[3]{2^2 y}} \\
&= \frac{x}{\sqrt[3]{2^2 y}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2y^2}}{\sqrt[3]{2y^2}} && \text{Multiplicamos numerador y denominador por } \sqrt[3]{2y^2} \\
&= \frac{x\sqrt[3]{2y^2}}{\sqrt[3]{2^3 y^3}} && \text{Aplicamos leyes de los radicales en el denominador} \\
&= \frac{x\sqrt[3]{2y^2}}{\sqrt[3]{(2y)^3}} \\
&= \frac{x\sqrt[3]{2y^2}}{2y} && \text{Porque } \sqrt[3]{(2y)^3} = 2y
\end{aligned}$$

4. Como $\sqrt[4]{25x^3} = \sqrt[4]{5^2x^3}$ debemos multiplicar numerador y denominador por $\sqrt[4]{5^2x}$ para obtener $\sqrt[4]{5^4x^4}$ en el denominador.

$$\begin{aligned}
\frac{50}{y\sqrt[4]{25x^3}} &= \frac{50}{y\sqrt[4]{5^2x^3}} \\
&= \frac{50}{y\sqrt[4]{5^2x^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5^2x}}{\sqrt[4]{5^2x}} && \text{Multiplicamos numerador y denominador por } \sqrt[4]{5^2x}
\end{aligned}$$

$$= \frac{50\sqrt[4]{5^2x}}{y\sqrt[4]{5^4x^4}} \qquad \text{Aplicamos leyes de los radicales en el denominador}$$

$$= \frac{50\sqrt[4]{25x}}{y\sqrt[4]{(5x)^4}}$$

$$= \frac{50\sqrt[4]{25x}}{y(5x)} \qquad \text{Porque } \sqrt[4]{(5x)^4} = 5x$$

$$= \frac{10\sqrt[4]{25x}}{xy}$$

5. Para racionalizar el denominador multipliquemos numerador y denominador por una expresión que nos convierta el radicando del denominador en $(2b)^5$.

$$\frac{\sqrt[5]{64a^7}}{\sqrt[5]{2b}} = \frac{\sqrt[5]{64a^7}}{\sqrt[5]{2b}} \cdot \frac{\sqrt[5]{(2b)^4}}{\sqrt[5]{(2b)^4}} \qquad \text{Multiplicamos numerador y denominador por } \sqrt[5]{(2b)^4}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{(2^6a^7)(2^4b^4)}}{\sqrt[5]{(2b)(2b)^4}} \qquad \text{Aplicamos leyes de los radicales}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{2^{10}a^7b^4}}{\sqrt[5]{(2b)^5}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{(2^2a)^5\,a^2b^4}}{2b} \qquad \text{Porque } \sqrt[5]{(2b)^5} = 2b$$

$$= \frac{\sqrt[5]{(2^2a)^5}\sqrt[5]{a^2b^4}}{2b} \qquad \text{Aplicamos leyes de los radicales en el numerador}$$

$$= \frac{2^2a\sqrt[5]{a^2b^4}}{2b} \qquad \text{Porque } \sqrt[5]{(2^2a)^5} = 2^2a$$

$$= \frac{2a\sqrt[5]{a^2b^4}}{b}.$$

Ejercicios propuestos

Suponiendo que las variables sólo representan números positivos, racionalizar el denominador.

1. $\sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

2. $\dfrac{5\sqrt{9x}}{\sqrt{5y^3}}$.

3. $\dfrac{4}{7\sqrt[3]{4^2y}}$.

4. $\sqrt[4]{\dfrac{64x}{9y}}$.

5. $\dfrac{\sqrt[5]{-96x^7}}{\sqrt[5]{y^3}}$.

Respuestas

1. $\dfrac{1}{4}\sqrt{6}$.

2. $\dfrac{3}{y^2}\sqrt{5xy}$.

3. $\dfrac{\sqrt[3]{4y^2}}{7y}$.

4. $\dfrac{2\sqrt[4]{36xy^3}}{3y}$.

5. $\dfrac{-2x\sqrt[5]{x^2y^2}}{y}$.

Lección 64

Racionalización del denominador II

En esta lección aprenderemos a racionalizar el denominador de fracciones cuyo denominador es la suma o diferencia de dos radicales de índice dos o uno de los dos términos es un radical de índice dos y el otro término no tiene radicales.

Consideremos, por ejemplo, una fracción con un denominador de la forma $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ con a y b expresiones algebraicas. Aplicando uno de los productos notables tenemos que

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b.$$

Observamos que al multiplicar $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ por $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ obtenemos una expresión sin radicales. Por lo tanto, si tenemos una fracción cuyo denominador es $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, para racionalizar el denominador multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

La expresión $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ se llama la **conjugada** de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Ambas expresiones sólo difieren en el signo de la mitad. De igual forma, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ es la conjugada de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

De manera similar procedemos si el denominador es de la forma $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a \pm \sqrt{b}$ ó $\sqrt{a} \pm b$.

Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 64.1

En cada numeral, suponiendo que las variables sólo representan números positivos, racionalizar el denominador.

1. $\dfrac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.
2. $\dfrac{18}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}$.
3. $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$.
4. $\dfrac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$.
5. $\dfrac{2(y-z)}{\sqrt{y}-\sqrt{z}}$.

Solución

1. Multipliquemos numerador y denominador de la fracción por la conjugada de $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ que es $\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} &= \frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \\
&= \frac{6\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{6\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} \\
&= \frac{6\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{5-2} \\
&= \frac{6\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{3} \\
&= 2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

2. Multipliquemos numerador y denominador de la fracción por la conjugada de $\sqrt{11}-\sqrt{5}$ que es $\sqrt{11}+\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}
\frac{18}{\sqrt{11}-\sqrt{5}} &= \frac{18}{\sqrt{11}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{11}+\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{5}} \\
&= \frac{18\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)} \\
&= \frac{18\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} \\
&= \frac{18\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)}{11-5} \\
&= \frac{18\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)}{6} \\
&= 3\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right).
\end{aligned}$$

3. Multipliquemos numerador y denominador por $3+\sqrt{5}$ que es la conjugada de $3-\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3-\sqrt{5}} &= \frac{2}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\
&= \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} \\
&= \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{9-5} \\
&= \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{4} \\
&= \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right).
\end{aligned}
$$

4. Multipliquemos numerador y denominador por $\sqrt{x}-\sqrt{2}$ que es la conjugada de $\sqrt{x}+\sqrt{2}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} &= \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \\
&= \frac{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} \\
&= \frac{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{x-2}.
\end{aligned}
$$

5. Multipliquemos numerador y denominador por $\sqrt{y}+\sqrt{z}$ que es la conjugada de $\sqrt{y}-\sqrt{z}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{2(y-z)}{\sqrt{y}-\sqrt{z}} &= \frac{2(y-z)}{\sqrt{y}-\sqrt{z}} \cdot \frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{y}+\sqrt{z}} \\
&= \frac{2(y-z)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)}{\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)} \\
&= \frac{2(y-z)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)}{\left(\sqrt{y}\right)^2-\left(\sqrt{z}\right)^2} \\
&= \frac{2(y-z)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)}{y-z} \\
&= 2\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right).
\end{aligned}
$$

En el proceso de racionalización del denominador, la expresión por la que multiplicamos numerador y denominador de una expresión para eliminar los radicales del denominador, se llama **factor racionalizante** de la expresión.

Ejemplo 64.2

En cada numeral, suponiendo que las variables sólo representan números positivos, racionalizar el denominador.

1. $\dfrac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$.
2. $\dfrac{ax}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}$.
3. $\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$

Solución

1. Multiplicamos numerador y denominador por $4+\sqrt{3}$ que es el factor racionalizante.

$$\begin{aligned}
\frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} &= \frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}\cdot\frac{4+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\\
&= \frac{\left(5+2\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)}{\left(4-\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)}\\
&= \frac{20+(5+8)\sqrt{3}+6}{4^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\\
&= \frac{26+13\sqrt{3}}{16-3}\\
&= \frac{13\left(2+\sqrt{3}\right)}{13}\\
&= 2+\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

2. Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{x+a}+\sqrt{x}$ que es la conjugada de $\sqrt{x+a}-\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
\frac{ax}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}} &= \frac{ax}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{ax\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}\\
&= \frac{ax\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+a}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}\\
&= \frac{ax\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}{(x+a)-x}\\
&= \frac{ax\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}{a}
\end{aligned}$$

$$= x\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right).$$

3. Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$ que es la conjugada del denominador.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}} &= \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}\cdot\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}\\
&= \frac{\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)}{\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)}\\
&= \frac{\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)^2}{\left(\sqrt{x+y}\right)^2-\left(\sqrt{x-y}\right)^2}\\
&= \frac{\left(\sqrt{x+y}\right)^2-2\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}+\left(\sqrt{x-y}\right)^2}{(x+y)-(x-y)}\\
&= \frac{x+y-2\sqrt{(x+y)(x-y)}+x-y}{2y}\\
&= \frac{2x-2\sqrt{x^2-y^2}}{2y}\\
&= \frac{2\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)}{2y}\\
&= \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{y}.
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

Suponiendo que las variables sólo representan números positivos, racionalizar el denominador.

1. $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$.
2. $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+3\sqrt{2}}$.
3. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.
4. $\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$.

Respuestas

1. $-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)$.

2. $\dfrac{4\sqrt{2}-5}{7}$.

3. $\dfrac{2x-y+\sqrt{xy}}{4x-y}$.

4. $\dfrac{x+2\sqrt{3x+9}+6}{x}$.

Lección 65

Potenciación con exponentes racionales

En esta lección vamos a definir las potencias cuyo exponente es un número racional y su aplicación en la simplificación de ciertas expresiones con radicales.

En las lecciones 1 y 2 definimos la n-ésima potencia a^n de una expresión algebraica a, para n un entero cualquiera, y se enunciaron las leyes básicas para los exponentes. Veamos ahora las potencias cuando el exponente es un número racional para las cuales también son válidas estas leyes.

Sea n un entero positivo mayor o igual que 2 y sea b un número real tal que $\sqrt[n]{b}$ esté definida. A $\sqrt[n]{b}$ también podemos expresarla como $b^{1/n}$, es decir,

$$\sqrt[n]{b} = b^{1/n}.$$

Observemos que como $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$ entonces tenemos $\left(b^{1/n}\right)^n = b$.

Si $b^{1/n}$ está definido y m es un entero diferente de cero, definimos la potencia $b^{m/n}$ así:

$$b^{m/n} = \left(b^{1/n}\right)^m.$$

En esta definición suponemos que m y n no tienen factores comunes.

En general, si m/n es un número racional, con n un entero positivo, y b es un número real tal que $b^{1/n}$ esté definido,

$$b^{m/n} = \left(b^{1/n}\right)^m = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m \quad \text{o en forma equivalente} \quad b^{m/n} = \left(b^m\right)^{1/n} = \sqrt[n]{b^m}.$$

De esta manera quedan definidas las potencias para cualquier exponente racional y se puede comprobar que las leyes de los exponentes son válidas también para este caso.

Ejemplo 65.1

Evaluar las siguientes expresiones, aplicando que $b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$.

1. $(64)^{1/3}$.
2. $(-32)^{1/5}$.
3. $8^{-1/3}$.
4. $(27)^{2/3}$.

5. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{1/2}$.

6. $\left(\dfrac{-27}{8}\right)^{2/3}$.

Solución

1. $(64)^{1/3} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$.

2. $(-32)^{1/5} = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$.

3. $8^{-1/3} = \dfrac{1}{8^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{1}{2}$.

4. $(27)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{3^3}\right)^2 = 3^2 = 9$.

5. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{2}{3}$.

6. $\left(\dfrac{-27}{8}\right)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{\dfrac{-27}{8}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{\left(\dfrac{-3}{2}\right)^3}\right)^2 = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$.

Ejemplo 65.2

Simplificar las siguientes expresiones, aplicando las leyes de los exponentes. Escribir la respuesta con exponentes positivos.

1. $\left(2a^{1/3}\right)\left(9a^{1/2}\right)$.

2. $\left(2x^4y^{3/5}\right)^3\left(8y^{-2}\right)^{2/3}$.

3. $\dfrac{\left(y^{10}z^{-5}\right)^{1/5}}{\left(y^{-2}z^3\right)^{1/3}}$.

4. $\left(\dfrac{8x^6y^{4/9}z^3}{125x^9y^{1/9}z^2}\right)^{1/3}$.

5. $\left(\dfrac{8x^3y^{-4/3}}{27x^{-6}y}\right)^{-2/3}$.

Solución

1. $$\begin{aligned}\left(2a^{1/3}\right)\left(9a^{1/2}\right) &= 2\cdot 9\cdot a^{1/3}a^{1/2}\\ &= 18a^{1/3+1/2}\\ &= 18a^{5/6}.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\left(2x^4y^{3/5}\right)^3\left(8y^{-2}\right)^{2/3} &= \left(2^3x^{12}y^{9/5}\right)\left(8^{2/3}y^{-4/3}\right)\\ &= 2^3\cdot(2^3)^{2/3}\cdot x^{12}y^{9/5}y^{-4/3}\\ &= 2^3\cdot 2^2\cdot x^{12}y^{9/5-4/3}\\ &= 2^5x^{12}y^{7/15}\\ &= 32x^{12}y^{7/15}.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\frac{\left(y^{10}z^{-5}\right)^{1/5}}{\left(y^{-2}z^3\right)^{1/3}} &= \frac{y^{10/5}z^{-5/5}}{y^{-2/3}z^{3/3}}\\ &= \frac{y^2z^{-1}}{y^{-2/3}z}\\ &= \frac{y^2}{y^{-2/3}}\cdot\frac{z^{-1}}{z}\\ &= y^{2+2/3}\cdot z^{-1-1}\\ &= \frac{y^{8/3}}{z^2}.\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\left(\frac{8x^6y^{4/9}z^3}{125x^9y^{1/9}z^2}\right)^{1/3} &= \left(\frac{2^3}{5^3}\cdot\frac{x^6}{x^9}\cdot\frac{y^{4/9}}{y^{1/9}}\cdot\frac{z^3}{z^2}\right)^{1/3}\\ &= \left(\frac{2^3}{5^3}\cdot x^{-3}\cdot y^{1/3}\cdot z\right)^{1/3}\\ &= \left(\frac{2^3y^{1/3}z}{5^3x^3}\right)^{1/3}\\ &= \frac{2y^{1/9}z^{1/3}}{5x}.\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}\left(\frac{8x^3y^{-4/3}}{27x^{-6}y}\right)^{-2/3} &= \left(\frac{2^3}{3^3}\cdot\frac{x^3}{x^{-6}}\cdot\frac{y^{-4/3}}{y}\right)^{-2/3}\\ &= \left(2^3\cdot 3^{-3}\cdot x^{3+6}\cdot y^{-4/3-1}\right)^{-2/3}\\ &= \left(2^3\cdot 3^{-3}\cdot x^9\cdot y^{-7/3}\right)^{-2/3}\\ &= 2^{-2}\cdot 3^2\cdot x^{-6}\cdot y^{14/9}\\ &= \frac{9y^{14/9}}{4x^6}.\end{aligned}$$

Los exponentes racionales se pueden emplear para simplificar ciertas expresiones que contienen radicales y especialmente aquellas con un producto o cociente de radicales de distinto índice. Vamos a ilustrarlo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 65.3

En cada numeral, suponiendo que las variables sólo representan números positivos, simplificar la expresión dada.

1. $\sqrt[8]{x^4y^2}$.

2. $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}$.

3. $\sqrt[3]{x^2y}\,\sqrt{xy}$.

4. $\dfrac{\sqrt[3]{y^2z}}{\sqrt[6]{y^5z^4}}$.

Solución

1. $\sqrt[8]{x^4y^2} = (x^4y^2)^{1/8} = x^{4/8}y^{2/8} = x^{2/4}y^{1/4} = (x^2y)^{1/4} = \sqrt[4]{x^2y}$.

2. $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} = \left(a^2a^{1/2}\right)^{1/3} = \left(a^{5/2}\right)^{1/3} = a^{5/6} = \sqrt[6]{a^5}$.

3. $$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^2y}\,\sqrt{xy} &= \left(x^2y\right)^{1/3}(xy)^{1/2} \\ &= x^{2/3}y^{1/3}x^{1/2}y^{1/2} \\ &= x^{2/3+1/2}y^{1/3+1/2} \\ &= x^{7/6}y^{5/6} \\ &= xx^{1/6}y^{5/6} \\ &= x\left(xy^5\right)^{1/6} \\ &= x\sqrt[6]{xy^5}. \end{aligned}$$

Nota:

Cuando simplificamos expresiones con radicales usando potencias con exponentes racionales, una vez realizado el proceso, debemos escribir de nuevo la expresión obtenida en términos de radicales.

4. $$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{y^2z}}{\sqrt[6]{y^5z^4}} &= \frac{(y^2z)^{1/3}}{(y^5z^4)^{1/6}} \\ &= \frac{y^{2/3}z^{1/3}}{y^{5/6}z^{4/6}} \\ &= \frac{y^{2/3}}{y^{5/6}}\cdot\frac{z^{1/3}}{z^{4/6}} \\ &= y^{-1/6}z^{-2/6} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\left(yz^2\right)^{1/6}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[6]{yz^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[6]{yz^2}} \cdot \frac{\sqrt[6]{y^5z^4}}{\sqrt[6]{y^5z^4}} \quad \text{Racionalizando el denominador}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{y^5z^4}}{\sqrt[6]{y^6z^6}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{y^5z^4}}{yz}.$$

Ejercicios propuestos

I. Simplificar las siguientes expresiones, escribiendo la respuesta con exponentes positivos:

1. $\left(-3a^{1/4}\right)(9a)^{-3/2}$.
2. $\dfrac{(9xy)^{3/2}}{\left(27x^3y^{-4}\right)^{2/3}}$.
3. $\left(\dfrac{4x^{-6}y^2}{16x^8y^{-4}}\right)^{1/2}$.

II. Suponiendo que las variables sólo representan números positivos, simplificar las siguientes expresiones:

1. $\sqrt[3]{4}\,\sqrt[4]{2}$.
2. $\sqrt[3]{x^2z}\,\sqrt{xz^3}$.
3. $\dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[4]{x^3y}}$.

Respuestas

I.
1. $-\dfrac{1}{9a^{5/4}}$.
2. $\dfrac{3y^{25/6}}{x^{1/2}}$.
3. $\dfrac{y^3}{2x^7}$.

II.
1. $\sqrt[12]{2^{11}}$.
2. $xz\sqrt[6]{xz^5}$.
3. $\dfrac{1}{x}\sqrt[12]{x^7y^5}$.

Lección 66

Ejercicios de operaciones con radicales

En esta lección veremos algunos ejercicios de simplificación de expresiones con radicales y de factorización de expresiones algebraicas con exponentes racionales.

Recordemos que simplificar una expresión con radicales significa:

- Extraer tantos factores de cada signo radical como sea posible, hasta que los exponentes de los factores primos y de las variables del radicando sean menores que el índice del radical.
- Racionalizar cada uno de los denominadores.
- Reducir el índice de cada radical, en los casos en que sea posible.
- Efectuar todas las operaciones de suma, resta, multiplicación o división indicadas.

Ejemplo 66.1

Simplificar las siguientes expresiones con radicales, suponiendo que las variables sólo representan números positivos:

1. $\sqrt{\dfrac{9}{5}} - \sqrt{\dfrac{1}{6}} - \sqrt{\dfrac{1}{20}} + \sqrt{6}$.
2. $\sqrt[5]{\dfrac{8x^3}{y^4}}\,\sqrt[5]{\dfrac{4x^4}{y^2}}$.
3. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4x^5y^2}} + \dfrac{1}{4y}\sqrt[3]{16x^4y}$.
4. $\dfrac{\sqrt{49x^5y^{-9}}}{\sqrt{24x^{-3}y^2}}$.
5. $\dfrac{\sqrt{5x} - 2\sqrt{3x}}{\sqrt{5x} - \sqrt{3x}} - \dfrac{\sqrt{5x} - \sqrt{3x}}{\sqrt{5x} + \sqrt{3x}}$.
6. $\dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{x^3y^2}{16}}}{\sqrt{xy}}$.

Solución

1. Primero simplifiquemos cada uno de los radicales para ver si obtenemos radicales semejantes y luego efectuamos las operaciones:

   $\sqrt{\frac{9}{5}} = \sqrt{\frac{3^2}{5}} = 3\sqrt{\frac{1}{5}} = 3\sqrt{\frac{1\cdot 5}{5\cdot 5}} = 3\sqrt{\frac{5}{5^2}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}.$

   $\sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{1\cdot 6}{6\cdot 6}} = \sqrt{\frac{6}{6^2}} = \frac{1}{6}\sqrt{6}.$

   $\sqrt{\frac{1}{20}} = \sqrt{\frac{1}{2^2\cdot 5}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1\cdot 5}{5\cdot 5}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{5^2}} = \frac{1}{10}\sqrt{5}.$

   Luego,

   $$\begin{aligned}\sqrt{\frac{9}{5}} - \sqrt{\frac{1}{6}} - \sqrt{\frac{1}{20}} + \sqrt{6} &= \frac{3}{5}\sqrt{5} - \frac{1}{6}\sqrt{6} - \frac{1}{10}\sqrt{5} + \sqrt{6}\\ &= \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right)\sqrt{5} + \left(-\frac{1}{6} + 1\right)\sqrt{6}\\ &= \frac{5}{10}\sqrt{5} + \frac{5}{6}\sqrt{6}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{6}\sqrt{6}.\end{aligned}$$

2. Primero efectuamos la multiplicación de los dos radicales de igual índice y luego simplificamos el resultado:

   $$\begin{aligned}\sqrt[5]{\frac{8x^3}{y^4}}\,\sqrt[5]{\frac{4x^4}{y^2}} &= \sqrt[5]{\frac{(8x^3)(4x^4)}{(y^4)(y^2)}}\\ &= \sqrt[5]{\frac{32x^7}{y^6}}\\ &= \sqrt[5]{\frac{32x^7\cdot y^4}{y^6\cdot y^4}} && \text{Racionalizamos el denominador}\\ &= \sqrt[5]{\frac{2^5x^5x^2y^4}{(y^2)^5}}\\ &= \frac{2x}{y^2}\sqrt[5]{x^2y^4}.\end{aligned}$$

3. Primero simplificamos cada uno de los radicales:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4x^5y^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^2x^5y^2}\cdot\frac{2xy}{2xy}} \quad \text{Racionalizamos el denominador}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2xy}{2^3x^6y^3}}$$

$$= \frac{1}{2x^2y}\sqrt[3]{2xy}.$$

$$\sqrt[3]{16x^4y} = \sqrt[3]{2^4x^4y} = \sqrt[3]{(2^3x^3)(2xy)} = 2x\sqrt[3]{2xy}.$$

Luego,

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4x^5y^2}} + \frac{1}{4y}\sqrt[3]{16x^4y} = \frac{1}{2x^2y}\sqrt[3]{2xy} + \frac{2x}{4y}\sqrt[3]{2xy}$$

$$= \left(\frac{1}{2x^2y} + \frac{x}{2y}\right)\sqrt[3]{2xy}$$

$$= \left(\frac{1+x^2}{2x^2y}\right)\sqrt[3]{2xy}.$$

4. Efectuemos la división entre los dos radicales de igual índice y luego simplificamos el resultado:

$$\frac{\sqrt{49x^5y^{-9}}}{\sqrt{24x^{-3}y^2}} = \sqrt{\frac{49x^5y^{-9}}{24x^{-3}y^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{49}{24}\cdot\frac{x^5}{x^{-3}}\cdot\frac{y^{-9}}{y^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{7^2x^8}{2^3\cdot 3y^{11}}}$$

$$= \sqrt{\frac{7^2x^8}{2^3\cdot 3y^{11}}\cdot\frac{2\cdot 3y}{2\cdot 3y}} \quad \text{Racionalizamos el denominador}$$

$$= \sqrt{\frac{7^2x^8\cdot 6y}{2^4\cdot 3^2y^{12}}}$$

$$= \frac{7x^4}{2^2\cdot 3y^6}\sqrt{6y}$$

$$= \frac{7x^4}{12y^6}\sqrt{6y}.$$

5. Racionalicemos cada denominador y después realizamos la resta:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{5x}-2\sqrt{3x}}{\sqrt{5x}-\sqrt{3x}} &= \frac{\sqrt{5x}-2\sqrt{3x}}{\sqrt{5x}-\sqrt{3x}}\cdot\frac{\sqrt{5x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{5x}+\sqrt{3x}}\\
&= \frac{(\sqrt{5x})^2-\sqrt{15x^2}-2(\sqrt{3x})^2}{(\sqrt{5x})^2-(\sqrt{3x})^2}\\
&= \frac{5x-x\sqrt{15}-6x}{5x-3x}\\
&= \frac{-x-x\sqrt{15}}{2x}\\
&= \frac{-1-\sqrt{15}}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{5x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{5x}+\sqrt{3x}} &= \frac{\sqrt{5x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{5x}+\sqrt{3x}}\cdot\frac{\sqrt{5x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{5x}-\sqrt{3x}}\\
&= \frac{\left(\sqrt{5x}-\sqrt{3x}\right)^2}{\left(\sqrt{5x}\right)^2-\left(\sqrt{3x}\right)^2}\\
&= \frac{(\sqrt{5x})^2-2\sqrt{5x}\sqrt{3x}+(\sqrt{3x})^2}{(\sqrt{5x})^2-(\sqrt{3x})^2}\\
&= \frac{5x-2\sqrt{15x^2}+3x}{5x-3x}\\
&= \frac{8x-2x\sqrt{15}}{2x}\\
&= 4-\sqrt{15}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\sqrt{5x}-2\sqrt{3x}}{\sqrt{5x}-\sqrt{3x}}-\frac{\sqrt{5x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{5x}+\sqrt{3x}}=\frac{-1-\sqrt{15}}{2}-\left(4-\sqrt{15}\right)=\frac{-9+\sqrt{15}}{2}.$$

6. Como tenemos un cociente de radicales de distinto índice, utilicemos exponentes racionales y las leyes de los exponentes para efectuar la división y simplificar el resultado.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[5]{\dfrac{x^3y^2}{16}}}{\sqrt{xy}} &= \frac{\dfrac{x^{3/5}y^{2/5}}{2^{4/5}}}{x^{1/2}y^{1/2}}\\
&= \frac{1}{2^{4/5}}\cdot\frac{x^{3/5}}{x^{1/2}}\cdot\frac{y^{2/5}}{y^{1/2}}\\
&= \frac{1}{2^{4/5}}\cdot x^{1/10}y^{-1/10}\\
&= \frac{x^{1/10}}{2^{8/10}y^{1/10}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{x^{1/10}}{2^{8/10}y^{1/10}} \cdot \frac{2^{2/10}y^{9/10}}{2^{2/10}y^{9/10}}$$

$$= \frac{\left(2^2xy^9\right)^{1/10}}{2y}$$

$$= \frac{\sqrt[10]{4xy^9}}{2y}.$$

Ilustremos ahora con ejemplos, cómo factorizar expresiones algebraicas que contienen potencias con exponentes racionales.

Ejemplo 66.2

En cada numeral, factorizar la expresión algebraica y expresar la respuesta con exponentes positivos.

1. $2x^{5/3} - 4x^{2/3} - 6x^{-1/3}$.
2. $(x^2+3)^{-1/3} - \dfrac{2}{3}x^2\,(x^2+3)^{-4/3}$.
3. $\dfrac{1}{2}x^{-1/2}\,(3x+4)^{1/2} - \dfrac{3}{2}x^{1/2}\,(3x+4)^{-1/2}$.
4. $-2\,(x+2)^{1/2}\,(2x-1)^{-1/3} + 5\,(x+2)^{-1/2}\,(2x-1)^{2/3}$.

Solución

1. El mayor factor común de los coeficientes 2, 4 y 6 es 2 y tomamos como factor común literal $x^{-1/3}$, que es la potencia de x con el menor exponente.

   $$2x^{5/3}-4x^{2/3}-6x^{-1/3} = 2x^{-1/3}\left(x^2-2x-3\right) = 2x^{-1/3}\,(x+1)\,(x-3) = \frac{2\,(x+1)\,(x-3)}{x^{1/3}}.$$

   Observemos que:

   $x^{5/3} = x^{-1/3}\left(x^{5/3-(-1/3)}\right) = x^{-1/3}\left(x^{5/3+1/3}\right) = x^{-1/3}\,(x^2)$.

   $x^{2/3} = x^{-1/3}\left(x^{2/3-(-1/3)}\right) = x^{-1/3}\left(x^{2/3+1/3}\right) = x^{-1/3}x$.

2. Tomamos como factor común literal $(x^2+3)^{-4/3}$, que es la potencia de x^2+3 con el menor exponente.

   $$\begin{aligned}\left(x^2+3\right)^{-1/3} - \frac{2}{3}x^2\left(x^2+3\right)^{-4/3} &= \left(x^2+3\right)^{-4/3}\left[\left(x^2+3\right) - \frac{2}{3}x^2\right]\\ &= \left(x^2+3\right)^{-4/3}\left(\frac{1}{3}x^2+3\right)\\ &= \left(x^2+3\right)^{-4/3}\frac{(x^2+9)}{3}\end{aligned}$$

$$= \frac{x^2+9}{3\left(x^2+3\right)^{4/3}}.$$

3. El mayor factor común de los coeficientes es $1/2$ y tomamos como factor común literal $x^{-1/2}\left(3x+4\right)^{-1/2}$, que es el producto de las potencias de x y $3x+4$ con el menor exponente.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^{-1/2}\left(3x+4\right)^{1/2}-\frac{3}{2}x^{1/2}\left(3x+4\right)^{-1/2} &= \frac{1}{2}x^{-1/2}\left(3x+4\right)^{-1/2}\left[(3x+4)-3x\right]\\ &= 2x^{-1/2}\left(3x+4\right)^{-1/2}\\ &= \frac{2}{x^{1/2}\left(3x+4\right)^{1/2}}.\end{aligned}$$

4. Tomamos como factor común literal $\left(2x-1\right)^{-1/3}\left(x+2\right)^{-1/2}$.

$$\begin{aligned}&-2\left(x+2\right)^{1/2}\left(2x-1\right)^{-1/3}+5\left(x+2\right)^{-1/2}\left(2x-1\right)^{2/3}\\ &\qquad= \left(2x-1\right)^{-1/3}\left(x+2\right)^{-1/2}\left[-2(x+2)+5(2x-1)\right]\\ &\qquad= \left(2x-1\right)^{-1/3}\left(x+2\right)^{-1/2}\left(8x-9\right)\\ &\qquad= \frac{8x-9}{\left(2x-1\right)^{1/3}\left(x+2\right)^{1/2}}.\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

I. Simplificar las siguientes expresiones con radicales, suponiendo que las variables sólo representan números positivos:

1. $\sqrt{\dfrac{1}{3}}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{\dfrac{3}{4}}$.
2. $\sqrt[5]{\dfrac{x}{27y^2}}-\sqrt[5]{\dfrac{9y^8}{32x^9}}$.
3. $\sqrt[3]{x^2y}\,\sqrt[5]{\dfrac{x^3}{16y^2}}$.

II. En cada numeral, factorizar la expresión algebraica y expresar la respuesta con exponentes positivos.

1. $5x^{3/2}-20x^{1/2}+20x^{-1/2}$.
2. $x^2(3+x)^{-2/3}-x(3+x)^{1/3}$.

Respuestas

I. 1. $\dfrac{5}{6}\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

2. $\dfrac{2x^2 - 3y^2}{6x^2y}\sqrt[5]{9xy^3}$.

3. $\dfrac{x}{2y}\sqrt[15]{8x^4y^{14}}$.

II. 1. $\dfrac{5(x-2)^2}{x^{1/2}}$.

2. $\dfrac{-3x}{(3+x)^{2/3}}$

Lección 67

Triángulo de Pascal

En esta lección conoceremos una herramienta, llamada **Triángulo de Pascal**, para hallar los coeficientes del desarrollo de expresiones de la forma $(a+b)^n$ con n un número entero positivo o cero.

Hasta ahora hemos visto el desarrollo de las siguientes potencias de binomios:

$$\begin{aligned}
&(a+b)^0 = 1\\
&(a+b)^1 = a+b\\
&(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2\\
&(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.
\end{aligned}$$

Si multiplicamos $(a+b)^3$ por $a+b$ obtenemos

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Si este resultado se multiplica por $a+b$ tenemos

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Continuando de esta forma podemos obtener las potencias enteras positivas de $a+b$.

Observando el desarrollo de estas potencias de $a+b$, vemos que:

1. El número de términos del desarrollo es siempre **uno** más que el exponente del binomio.
2. El exponente del primero y del último término siempre es igual al exponente del binomio.
3. El exponente de a disminuye de uno en uno en cada término y el de b aumenta de uno en uno.
4. En cada término, la suma de los exponentes de a y b es igual al exponente del binomio.
5. Los coeficientes de los términos que equidistan de los extremos son iguales.
6. Si el coeficiente de cualquier término se multiplica por el exponente de a en ese término y este producto de divide entre el número de la posición del término en el desarrollo, se obtiene el coeficiente del término que sigue.

En general, estas propiedades se cumplen para el desarrollo de $(a+b)^n$, con n entero positivo o cero.

Los coeficientes de los términos en estos desarrollos guardan una simetría que permite disponerlos en forma de un arreglo triangular de números conocido como **Triángulo de Pascal** y con él obtenemos los coeficientes del desarrollo de potencias de un binomio de una manera fácil.

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
(a+b)^0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
(a+b)^1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
(a+b)^2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
(a+b)^3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
(a+b)^4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
(a+b)^5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
(a+b)^6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Y así sucesivamente, como veremos a continuación.

Podemos construir el Triángulo de Pascal así:

- El primer renglón es 1.
- El segundo renglón es 1 1.
- Los extremos de cada renglón son iguales a 1.
- Todos los números diferentes de 1, se encuentran sumando los dos números del renglón anterior, que aparecen a la izquierda y derecha del número.

Ejemplo 67.1

Hallar, usando el Triángulo de Pascal, el desarrollo de:

1. $(y+3)^3$
2. $(1+2x)^5$.

Solución

1. Por el Triángulo de Pascal sabemos que los coeficientes en el desarrollo son: 1, 3, 3, 1. Además, teniendo en cuenta las propiedades del desarrollo de una potencia de un binomio tenemos que:
$$(y+3)^3 = y^3 + 3(y^2)(3) + 3(y)(3)^2 + 3^3 = y^3 + 9y^2 + 27y + 27.$$
2. Los coeficientes para el desarrollo son: 1, 5, 10, 10, 5, 1. Usando además, las propiedades del desarrollo de una potencia de un binomio, tenemos que
$$(1+2x)^5 = (1)^5 + 5(1)^4(2x)^1 + 10(1)^3(2x)^2 + 10(1)^2(2x)^3 + 5(1)^1(2x)^4 + (2x)^5.$$
$$(1+2x)^5 = 1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5.$$

Observemos los siguientes desarrollos:

$$\begin{aligned}
(a-b)^0 &= 1\\
(a-b)^1 &= a-b\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\
(a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.
\end{aligned}$$

Los términos del desarrollo de estas potencias tienen las mismas características de las respectivas potencias de $a+b$, excepto que los signos de los términos son alternadamente positivos y negativos, empezando siempre con signo positivo. Podemos por tanto, usar el Triángulo de Pascal para el desarrollo de las potencias de $a-b$, teniendo en cuenta los signos.

Ejemplo 67.2

Hallar, usando el Triángulo de Pascal, el desarrollo de:

1. $(x-1)^7$.
2. $(3a^3-2b)^4$.

Solución

1. En el Triángulo de Pascal mostrado al principio de esta lección, vimos los coeficientes del desarrollo del binomio hasta el exponente 6. A partir de éste, podemos encontrar los coeficientes para el desarrollo con exponente 7. Estos son: 1, $1+6=7$, $6+15=21$, $15+20=35$, $20+15=35$, $15+6=21$, $6+1=7$ y 1. Con estos coeficientes y usando las propiedades del desarrollo de una potencia de un binomio tenemos entonces

   $$(x-1)^7 = x^7-7(x)^6(1)^1+21(x)^5(1)^2-35(x)^4(1)^3+35(x)^3(1)^4-21(x)^2(1)^5+7(x)^1(1)^6-(1)^7.$$

   Luego,
   $$(x-1)^7 = x^7-7x^6+21x^5-35x^4+35x^3-21x^2+7x-1.$$

2. $(3a^3-2b)^4 = (3a^3)^4-4(3a^3)^3(2b)^1+6(3a^3)^2(2b)^2-4(3a^3)^1(2b)^3+(2b)^4$

   y simplificando obtenemos

   $$(3a^3-2b)^4 = 81a^{12}-216a^9b+216a^6b^2-96a^3b^3+16b^4.$$

Existe un resultado muy importante, que se estudiará en otros cursos de matemáticas, conocido como **Teorema del Binomio** o **Binomio de Newton**, que permite hallar el desarrollo de cualquier potencia entera positiva de $a+b$.

Ejercicios propuestos

Hallar, utilizando el triángulo de Pascal, el desarrollo de:

1. $(4-x^4)^3$.
2. $(y+3)^4$.

3. $(x-y^2)^6$.
4. $(a+b)^8$.

Respuestas

1. $64-48x^4+12x^8-x^{12}$.
2. $y^4+12y^3+54y^2+108y+81$.
3. $x^6-6x^5y^2+15x^4y^4-20x^3y^6+15x^2y^8-6xy^{10}+y^{12}$.
4. $a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8$.

Lección 68

Ecuaciones cuadráticas en una variable

En esta lección iniciaremos nuestro trabajo con ecuaciones de segundo grado o ecuaciones cuadráticas en una variable y veremos un primer método para resolverlas utilizando la factorización de polinomios de grado dos. Presentaremos algunos ejemplos resueltos que permiten apropiar la estrategia de solución y dejaremos ejercicios propuestos para que el estudiante aplique el procedimiento para hallar las raíces.

Una **ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática en una variable $\boldsymbol{x}$** es toda ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ donde } a,\ b,\ c \text{ son constantes y } a \neq 0.$$

Ejemplo 68.1

1. La ecuación $4x^2 + 7x - 9 = 0$ es una ecuación cuadrática en x con $a = 4$, $b = 7$ y $c = -9$.
2. La ecuación $y^2 - 5y = -3$ es una ecuación cuadrática en y, ya que si sumamos 3 en los dos miembros obtenemos $y^2 - 5y + 3 = 0$, que es una ecuación de la forma $ay^2 + by + c = 0$ con $a = 1$, $b = -5$ y $c = 3$.
3. La ecuación $\frac{2}{5}z^2 = 4$ es una ecuación cuadrática en z ya que si multiplicamos los dos miembros por 5 y luego sumamos -20 a ambos lados, obtenemos $2z^2 - 20 = 0$, que es una ecuación de la forma $az^2 + bz + c = 0$ con $a = 2$, $b = 0$ y $c = -20$.

Las **raíces o soluciones** de una ecuación cuadrática en una variable son los valores de la variable que satisfacen la ecuación, es decir, son los números que al ser reemplazados por la variable en la ecuación dan como resultado un enunciado verdadero.

Ejemplo 68.2

1. 2 y -3 son soluciones de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$, ya que si reemplazamos x por 2 en la ecuación obtenemos el enunciado verdadero $0 = 0$, porque al sustituir x por 2 en el primer miembro se tiene $2^2 + 2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$.

   De igual forma al reemplazar x por -3 obtenemos $(-3)^2 + (-3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$.

   Por otra parte, 5 no es solución de la ecuación porque al reemplazar x por 5 en el primer miembro se obtiene $5^2 + 5 - 6 = 25 + 5 - 6 = 24 \neq 0$.
2. 5 y -5 son soluciones de $z^2 = 25$, ya que $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$.

¿Cómo encontrar las raíces de una ecuación cuadrática?

Hay varios métodos para resolver una ecuación cuadrática. Presentaremos en esta lección la **solución por factorización**, que utiliza la siguiente propiedad de los números reales:

Si p y q son números reales, entonces

$$pq = 0 \text{ sí y sólo si } p = 0 \text{ ó } q = 0.$$

Para resolver una ecuación cuadrática en una variable x, por este método, podemos proceder como sigue:

- Realizamos las operaciones necesarias para que un miembro de la ecuación sea un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$ y el otro miembro sea igual a 0.
- Factorizamos, si es posible, el polinomio como producto de dos factores lineales, con lo cual la ecuación obtenida en el paso anterior es el producto de estos factores igual a cero. Como el producto de dos factores es cero si y sólo si al menos uno de ellos es cero, obtenemos dos ecuaciones de primer grado cuyas soluciones son las soluciones de la ecuación original.

Como en las ecuaciones lineales y en los sistemas de ecuaciones, aquí también es importante verificar la solución reemplazando los valores obtenidos para la variable en la ecuación original.

Más adelante estudiaremos otros métodos para resolver ecuaciones cuadráticas cuando no es fácil factorizar el polinomio.

Ejemplo 68.3

Hallar las raíces o soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1. $x^2 + 11x = -24$.
2. $5y^2 - 4y = 0$.
3. $7x = 15 - 30x^2$.
4. $3(2 - 3x) = (x + 4)(x - 4)$.
5. $9x^2 - 6x - 8 = 0$.
6. $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Solución

1. $$
\begin{array}{rl}
x^2 + 11x = -24 & \\
x^2 + 11x + 24 = -24 + 24 & \text{Sumamos 24 a los dos miembros de la ecuación} \\
(x + 8)(x + 3) = 0 & \text{Factorizamos el polinomio de la izquierda} \\
x + 8 = 0 \;\text{ ó }\; x + 3 = 0 & \text{El producto de dos factores es 0} \\
 & \text{si y sólo si al menos uno de ellos es 0} \\
x = -8 \;\text{ ó }\; x = -3 & \text{Resolvemos las dos ecuaciones lineales.}
\end{array}
$$

   Luego, $x = -8$ y $x = -3$ son las raíces o soluciones de la ecuación $x^2 + 11x = -24$.

Para comprobar que estos dos valores de x son soluciones de la ecuación reemplazamos cada uno de ellos en la ecuación original.

Si $x = -8$: $(-8)^2 + 11(-8) = -24$; $64 - 88 = -24$; $-24 = -24$.

Si $x = -3$: $(-3)^2 + 11(-3) = -24$; $9 - 33 = -24$; $-24 = -24$.

2. La ecuación es de la forma $ay^2 + by + c = 0$, con $a = 5$, $b = -4$ y $c = 0$, por lo que la factorización del miembro de la izquierda es aún más sencilla.

$5y^2 - 4y = 0$	
$y(5y - 4) = 0$	Factor común y
$y = 0$ ó $5y - 4 = 0$	El producto de dos factores es 0 si y sólo si al menos uno de ellos es 0
$y = 0$ ó $y = \frac{4}{5}$	Resolvemos las dos ecuaciones lineales.

Así, $y = 0$ y $y = \frac{4}{5}$ son las raíces de la ecuación $5y^2 - 4y = 0$.

Verificamos que efectivamente son las raíces, reemplazándolas en la ecuación original:

Para $y = 0$ tenemos $5(0)^2 - 4(0) = 5(0) - 4(0) = 0 - 0 = 0$.

Si $y = \frac{4}{5}$, entonces $5\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 4\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\frac{16}{25}\right) - \frac{16}{5} = \frac{16}{5} - \frac{16}{5} = 0$.

3.

$7x = 15 - 30x^2$	
$30x^2 + 7x - 15 = 0$	Trasponemos términos
$(6x + 5)(5x - 3) = 0$	Factorizamos el polinomio de la izquierda
$6x + 5 = 0$ ó $5x - 3 = 0$	El producto de dos factores es 0 si y sólo si al menos uno de ellos es 0
$x = -\frac{5}{6}$ ó $x = \frac{3}{5}$	Resolvemos las dos ecuaciones lineales.

Luego, las soluciones o raíces de la ecuación dada son $x = -\frac{5}{6}$ y $x = \frac{3}{5}$.

Verificar que efectivamente éstas son las raíces, reemplazándolas en la ecuación original.

4. Realizamos operaciones para llevar la ecuación a la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y luego resolvemos la ecuación resultante:

$3(2 - 3x) = (x + 4)(x - 4)$	
$6 - 9x = x^2 - 16$	Realizamos las operaciones indicadas
$0 = x^2 + 9x - 22$	Trasponemos términos
$0 = (x + 11)(x - 2)$	Factorizamos el polinomio de la derecha
$x + 11 = 0$ ó $x - 2 = 0$	El producto de dos factores es 0 si y sólo si al menos uno de ellos es 0
$x = -11$ ó $x = 2$	Resolvemos las dos ecuaciones lineales.

Luego, las soluciones o raíces de la ecuación dada son $x = -11$ y $x = 2$.

Comprobamos que estos valores son soluciones de la ecuación reemplazándolos en la ecuación original:

Si $x = -11$: $3(2 - 3(-11)) = (-11 + 4)(-11 - 4)$; $3(35) = (-7)(-15)$; $105 = 105$.

Si $x = 2$: $3(2 - 3(2)) = (2 + 4)(2 - 4)$; $3(-4) = 6(-2)$; $-12 = -12$.

5. $9x^2 - 6x - 8 = 0$

$(3x + 2)(3x - 4) = 0$	Factorizamos el polinomio de la izquierda
$3x + 2 = 0$ ó $3x - 4 = 0$	El producto de dos factores es 0 si y sólo si al menos uno de ellos es 0
$x = -\dfrac{2}{3}$ ó $x = \dfrac{4}{3}$	Encontramos las raíces de la ecuación.

Luego, $x = -\dfrac{2}{3}$ y $x = \dfrac{4}{3}$ son las soluciones de la ecuación original.

Es fácil comprobar que $x = -\dfrac{2}{3}$ y $x = \dfrac{4}{3}$ son raíces de la ecuación dada.

En efecto, si $x = -\dfrac{2}{3}$: $9\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 - 6\left(-\dfrac{2}{3}\right) - 8 = 0$; $4 + 4 - 8 = 0$; $0 = 0$.

Si $x = \dfrac{4}{3}$: $9\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 - 6\left(\dfrac{4}{3}\right) - 8 = 0$; $16 - 8 - 8 = 0$; $0 = 0$.

6. Factorizando el miembro izquierdo de la ecuación obtenemos

$$(x - 5)^2 = 0, \text{ ó, } (x - 5)(x - 5) = 0.$$

Al igualar cada factor a cero tenemos $x - 5 = 0$ ó $x - 5 = 0$. Por tanto cada ecuación tiene una solución, $x = 5$. Como $x - 5$ aparece dos veces como factor en la ecuación, al número 5 se le llama **raíz doble**, ó **raíz de multiplicidad dos** de la ecuación.

$x = 5$ satisface la ecuación $x^2 - 10x + 25 = 0$, ya que $5^2 - 10(5) + 25 = 25 - 50 + 25 = 0$.

Ejemplo 68.4

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x - 9}{6} = \dfrac{3}{2}$.
2. $\dfrac{1}{y - 2} - \dfrac{1}{y - 1} = \dfrac{1}{6}$.

Solución

1. El mínimo común denominador de los denominadores es 6. Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por 6 para eliminar los denominadores.

$$6\left(\frac{x^2}{3} - \frac{x - 9}{6}\right) = 6\left(\frac{3}{2}\right)$$

Realizando operaciones obtenemos

$$2x^2 - (x - 9) = 9.$$

Resolvamos esta ecuación:

$2x^2 - (x-9) - 9 = 0$	Trasponemos términos
$2x^2 - x = 0$	Reducimos términos semejantes
$x(2x-1) = 0$	Factorizamos el lado izquierdo
$x = 0$ ó $2x - 1 = 0$	El producto de dos factores es 0 si y sólo si al menos uno de ellos es 0
$x = 0$ ó $x = \dfrac{1}{2}$	Resolvemos las dos ecuaciones lineales.

Luego, las soluciones de la ecuación original son $x = 0$ y $x = \dfrac{1}{2}$.

Comprobar que éstas son las raíces de la ecuación reemplazándolas en la ecuación original.

2. Debemos tener en cuenta que $y \neq 2$ y $y \neq 1$, ya que estos valores hacen 0 los denominadores. El mínimo común denominador de los denominadores es $6(y-2)(y-1)$. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por él, tenemos

$$6(y-2)(y-1)\left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y-1}\right) = 6(y-2)(y-1)\left(\frac{1}{6}\right).$$

Simplificando obtenemos

$$6(y-1) - 6(y-2) = (y-2)(y-1).$$

Resolvamos esta ecuación:

$6y - 6 - 6y + 12 = y^2 - 3y + 2$	Realizamos operaciones
$-y^2 + 3y + 4 = 0$	Trasponemos términos y reducimos términos semejantes
$y^2 - 3y - 4 = 0$	Multiplicamos ambos miembros por -1
$(y-4)(y+1) = 0$	Factorizamos el lado izquierdo
$y - 4 = 0$ ó $y + 1 = 0$	El producto de dos factores es 0 si y sólo si al menos uno de ellos es 0
$y = 4$ ó $y = -1$	Resolvemos las ecuaciones lineales.

Luego, $y = 4$ y $y = -1$ son las soluciones de la ecuación original. Ambas raíces satisfacen la restricción $y \neq 2$ y $y \neq 1$.

Verificar que ambas soluciones satisfacen la ecuación original.

Ejercicios propuestos

En cada numeral, resolver la ecuación y comprobar que las soluciones halladas satisfacen la ecuación.

1. $x^2 - 2x - 15 = 0$.
2. $y^2 = 19y - 88$.
3. $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

4. $(z-2)^2 - \dfrac{2z-5}{3} = 3.$

5. $\dfrac{3y+2}{4} = 5 - \dfrac{9y+14}{12y}.$

Solución

1. 5 y -3.

2. 8 y 11.

3. $-\dfrac{1}{2}$, raíz de multiplicidad 2.

4. $\dfrac{2}{3}$ y 4.

5. $\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{14}{3}$.

Lección 69

Fórmula cuadrática I

En esta lección deduciremos y aprenderemos a usar una fórmula que nos permite hallar las raíces de una ecuación cuadrática cuando no es fácil resolverla por factorización, y además nos proporciona información sobre sus raíces sin hallarlas. Aplicaremos la fórmula en la solución de algunas ecuaciones cuadráticas y dejaremos ejercicios propuestos para que el estudiante entienda y practique el manejo de la fórmula.

Vamos a obtener la fórmula general para encontrar las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, con $a \neq 0$.

$$ax^2+bx=-c \qquad \text{Sumamos } -c \text{ a ambos lados}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \qquad \text{Dividimos entre } a \text{ en ambos lados}$$

Sumamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos miembros para completar un trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \qquad \text{Factorizamos el lado izquierdo}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad \text{Sumamos las fracciones en el lado derecho.}$$

Si b^2-4ac es un número negativo, la igualdad no tiene sentido porque toda potencia par de un número real es un número positivo, ó 0 si el número es 0. Luego, en este caso, la ecuación anterior no tiene raíces en los reales, y por lo tanto la ecuación original tampoco.

Suponiendo entonces que b^2-4ac es un número mayor o igual que 0, continuamos como sigue:

Trasponemos términos

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$$

Factorizamos el lado izquierdo como una diferencia de cuadrados

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right]=0.$$

Tenemos entonces dos ecuaciones lineales:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=0 \qquad \text{ó} \qquad \left(x+\frac{b}{2a}\right)-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=0$$

Resolvamos estas ecuaciones:

$$\begin{aligned}
x+\frac{b}{2a}&=-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} & \text{ó}\quad x+\frac{b}{2a}&=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\\
x&=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} & \text{ó}\quad x&=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\\
x&=-\frac{b}{2a}-\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac} & \text{ó}\quad x&=-\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}\\
x&=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{ó}\quad x&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Entonces las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, con $a\neq 0$ son:

$$x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

que podemos escribir como

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Esta fórmula es conocida como la **fórmula cuadrática.**

La expresión b^2-4ac se conoce con el nombre de **discriminante** de la ecuación $ax^2+bx+c=0$; la denotaremos con la letra D, es decir, $\boldsymbol{D=b^2-4ac}$. Dicha cantidad proporciona información sobre las soluciones de la ecuación, sin hallarlas, así:

Si D es un número positivo, la ecuación tiene dos soluciones que son números reales distintos.

Si $D=0$, la ecuación tiene dos soluciones que son números reales iguales, esto es, la ecuación tiene una **raíz doble** o de **multiplicidad dos**.

Si D es un número negativo, la ecuación no tiene raíces reales, sus raíces son números complejos que estudiaremos más adelante.

Nota: La fórmula cuadrática se obtuvo bajo la condición b^2-4ac mayor o igual a cero. Sin embargo, en la práctica, no es necesario chequear esa condición antes de emplearla.

Ilustremos la aplicación de la fórmula con algunos ejemplos:

1. Resolvamos la ecuación $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

   Utilizando la fórmula cuadrática con $a = 3$, $b = -5$ y $c = 2$ tenemos:

   $$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}.$$

   Entonces las raíces de la ecuación son:

   $$x = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \text{ y } x = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

   Observamos que obtuvimos dos raíces reales distintas porque el discriminante $D = 1$ es positivo.

   Reemplazamos los valores de x en la ecuación original para comprobar que éstas sí son las raíces:

   Para $x = 1$ tenemos que $3(1)^2 - 5(1) + 2 = 3 - 5 + 2 = 0$.

   Si $x = \frac{2}{3}$, entonces $3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5\left(\frac{2}{3}\right) + 2 = \frac{4}{3} - \frac{10}{3} + 2 = -2 + 2 = 0$.

2. Hallemos los valores de x que satisfacen la ecuación $2x^2 + 7x + 3 = 0$.

   En este caso $a = 2$, $b = 7$ y $c = 3$. Entonces,

   $$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-7 \pm 5}{4}.$$

   Luego, los valores de x que satisfacen la ecuación son:

   $$x = \frac{-7+5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ y } x = \frac{-7-5}{4} = \frac{-12}{4} = -3.$$

   Verificamos en la ecuación original:

   Si $x = -\frac{1}{2}$, entonces $2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 3 = -3 + 3 = 0$.

   Si $x = -3$, tenemos $2(-3)^2 + 7(-3) + 3 = 18 - 21 + 3 = -3 + 3 = 0$.

3. Dada la ecuación $8x^2 - 2x - 3 = 0$, hallemos sus soluciones.

   En este caso $a = 8$, $b = -2$ y $c = -3$. Entonces,

   $$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(8)(-3)}}{2(8)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{16} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{16} = \frac{2 \pm 10}{16}.$$

   Luego, las soluciones de la ecuación son:

   $$x = \frac{2+10}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \text{ y } x = \frac{2-10}{16} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}.$$

   Verificar que los valores obtenidos satisfacen en la ecuación original.

4. Veamos cuáles son las soluciones de la ecuación $4x^2 + 3x - 22 = 0$.

   Utilizando la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = 3$ y $c = -22$ tenemos:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\,(4)\,(-22)}}{2\,(4)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 352}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{361}}{8} = \frac{-3 \pm 19}{8}.$$

   Entonces las soluciones de la ecuación son:

$$x = \frac{-3 + 19}{8} = \frac{16}{8} = 2 \ \text{ y } \ x = \frac{-3 - 19}{8} = \frac{-22}{8} = -\frac{11}{4}.$$

   Reemplazar los valores de x en la ecuación original para comprobar que éstas sí son las raíces.

Ejercicios propuestos

Usando la fórmula cuadrática, resolver las siguientes ecuaciones:

1. $3x^2 + 5x - 2 = 0$.
2. $x + 15 = 2x^2$.
3. $7y^2 + 32y = 15$.
4. $15x^2 + 14x - 8 = 0$.

Solución

1. -2 y $\frac{1}{3}$.
2. 3 y $-\frac{5}{2}$.
3. -5 y $\frac{3}{7}$.
4. $-\frac{4}{3}$ y $\frac{2}{5}$.

Lección 70

Fórmula cuadrática II

En esta lección continuaremos utilizando la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones de segundo grado en una variable. Además, usando el discriminante de la ecuación determinaremos las características de sus raíces reales, si las tiene, sin resolver la ecuación. Veremos también ejemplos resueltos en los cuales la ecuación cuadrática tiene dos raíces reales iguales o no tiene solución en los números reales. Propondremos unos ejercicios para que el estudiante practique tanto la aplicación de la fórmula, como el análisis de las raíces.

Ejemplo 70.1

En cada numeral, resolver la ecuación usando la fórmula cuadrática.

1. $u^2 + 2u = 6$.
2. $5 - 10w + 2w^2 = 0$.
3. $16x^2 + 1 = 8x$.
4. $4y^2 - 5y + 3 = 0$.

Solución

1. Trasponiendo términos tenemos

$$u^2 + 2u - 6 = 0.$$

Utilizamos la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = 2$ y $c = -6$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\,(1)\,(-6)}}{2\,(1)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4(7)}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2} \\ &= \frac{2\left(-1 \pm \sqrt{7}\right)}{2} \end{aligned}$$

$$= -1 \pm \sqrt{7}.$$

Las raíces de la ecuación son:

$$u = -1 + \sqrt{7} \;\text{ y }\; u = -1 - \sqrt{7}.$$

Reemplazamos estos valores de u en la ecuación original para comprobar que éstas sí son las raíces:

Para $u = -1 + \sqrt{7}$ tenemos que

$$\left(-1 + \sqrt{7}\right)^2 + 2\left(-1 + \sqrt{7}\right) = 1 - 2\sqrt{7} + 7 - 2 + 2\sqrt{7} = 6.$$

Para $u = -1 - \sqrt{7}$ tenemos que

$$\left(-1 - \sqrt{7}\right)^2 + 2\left(-1 - \sqrt{7}\right) = 1 + 2\sqrt{7} + 7 - 2 - 2\sqrt{7} = 6.$$

Observamos que en este caso el discriminante es $D = 28$, un número positivo, que nos indica que las raíces de la ecuación son dos números reales distintos, como en efecto las encontramos.

2. Ordenando los términos tenemos

$$2w^2 - 10w + 5 = 0.$$

Utilizamos la fórmula cuadrática con $a = 2$, $b = -10$ y $c = 5$:

$$\begin{aligned} w &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(2)(5)}}{2(2)} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{60}}{4} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{4(15)}}{4} \\ &= \frac{10 \pm 2\sqrt{15}}{4} \\ &= \frac{2(5 \pm \sqrt{15})}{4}. \end{aligned}$$

Luego, las soluciones o raíces de la ecuación son:

$$w = \frac{5 + \sqrt{15}}{2} \;\text{ y }\; w = \frac{5 - \sqrt{15}}{2}.$$

Comprobar que efectivamente éstas son las raíces de la ecuación.

3. Trasponiendo términos obtenemos

$$16x^2 - 8x + 1 = 0.$$

Utilizamos la fórmula cuadrática con $a = 16$, $b = -8$ y $c = 1$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(16)(1)}}{2(16)} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{32} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{0}}{32} \\ &= \frac{8}{32} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Luego, la ecuación tiene dos raíces reales iguales o, en otras palabras, una raíz doble o de multiplicidad 2 que es $x = \frac{1}{4}$.

Observamos que $D = 0$, lo cual ratifica el tipo de solución encontrada.

Verificar que $x = \frac{1}{4}$ es la solución de la ecuación original.

4. Aplicamos la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = -5$ y $c = 3$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(4)(3)}}{2(4)} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 48}}{8} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{8}. \end{aligned}$$

Como la cantidad subradical -23 es un número real negativo, $\sqrt{-23}$ no es un número real y por tanto, la ecuación no tiene solución en los números reales. Observamos que D es un número negativo.

Ejemplo 70.2

Resolver las siguientes ecuaciones utilizando la fórmula cuadrática:

1. $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{10}$.
2. $\dfrac{5}{x} - \dfrac{1}{x+2} = 1$.

Solución

1. Multiplicando ambos lados por 10, que es el mínimo común denominador de los denominadores, tenemos

$$2x^2 - 5x = 3.$$

Trasponiendo términos obtenemos

$$2x^2 - 5x - 3 = 0.$$

Resolvamos esta ecuación utilizando la fórmula cuadrática con $a = 2$, $b = -5$ y $c = -3$:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} \\
&= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} \\
&= \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} \\
&= \frac{5 \pm 7}{4}.
\end{aligned}$$

Las raíces de la ecuación son:

$$x = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{y} \quad x = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Si reemplazamos los valores de x en la ecuación original comprobamos que éstas sí son las raíces.

Observamos que en este caso el discriminante es $D = 49$, un número positivo, que nos indica que las raíces de la ecuación son dos números reales distintos.

2. Debemos tener en cuenta que $x \neq 0$ y $x \neq -2$ ya que estos valores anulan los denominadores.

Multiplicando ambos miembros por $x(x+2)$ para eliminar los denominadores, tenemos

$$5(x+2) - x = x(x+2).$$

Realizando operaciones y trasponiendo términos obtenemos

$$x^2 - 2x - 10 = 0.$$

Apliquemos la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 40}}{2} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{44}}{2} \\
&= \frac{2 \pm 2\sqrt{11}}{2} \\
&= \frac{2\left(1 \pm \sqrt{11}\right)}{2}
\end{aligned}$$

$$= 1 \pm \sqrt{11}.$$

Las raíces de la ecuación son:

$$x = -1 + \sqrt{11} \;\text{ y }\; x = -1 - \sqrt{11}.$$

Comprobar que efectivamente éstas son las raíces de la ecuación original.

Ejemplo 70.3

En cada numeral determinar, sin resolver la ecuación, si ésta tiene o no solución en los números reales. En caso afirmativo, indicar las características de sus raíces.

1. $y^2 - 4y = -4$.
2. $x^2 - 2x + 2 = 0$.
3. $2x^2 - x - 2 = 0$.

Solución

Para determinar si una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, tiene o no solución en los números reales basta analizar su discrimante $D = b^2 - 4ac$.

1. $y^2 - 4y = -4$ es equivalente a $y^2 - 4y + 4 = 0$.

   En este caso $a = 1$, $b = -4$ y $c = 4$ y entonces $D = (-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$.

   Como $D = 0$, la ecuación tiene dos soluciones que son números reales iguales o, en otras palabras, tiene una raíz doble o de multiplicidad 2.

2. $x^2 - 2x + 2 = 0$.

   En este caso $a = 1$, $b = -2$ y $c = 2$ y entonces $D = (-2)^2 - 4(1)(2) = 4 - 8 = -4$.

   Como D es un número negativo entonces la ecuación no tiene solución en los números reales.

3. $2x^2 - x - 2 = 0$.

   En este caso $a = 2$, $b = -1$ y $c = -2$ y entonces $D = (-1)^2 - 4(2)(-2) = 1 + 16 = 17$.

   Como $D = 17$ es un número positivo, la ecuación tiene dos soluciones que son números reales distintos.

Ejercicios propuestos

I. Usando la fórmula cuadrática, resolver las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + 2x - 16 = 0$.
2. $5y^2 - 9 = 46$.

II. En cada numeral, sin resolver la ecuación cuadrática, determinar si tiene o no solución en los números reales. En caso afirmativo, indicar las características de sus raíces.

1. $3x^2 + 5x - 2$.
2. $4x^2 - 4x + 1 = 0$.
3. $5x^2 - 7x + 8 = 0$.

Respuestas

I. 1. $-1 \pm \sqrt{17}$.

2. $\pm\sqrt{11}$.

II. 1. Dos raíces reales distintas.

2. Una raíz real de multiplicidad 2.

3. No tiene raíces reales.

Lección 71

Solución de ecuaciones cuadráticas por completación de cuadrado

En esta lección veremos cómo resolver ecuaciones cuadráticas usando la técnica de completación de cuadrado. Dejamos como ejercicio al lector verificar que los valores obtenidos para las variables satisfacen las respectivas ecuaciones.

Dada una ecuación cuadrática de la forma $x^2 = c$, con c un número positivo, hallemos su solución por factorización:

$$\begin{aligned}
x^2 - c &= 0 \\
x^2 - \left(\sqrt{c}\right)^2 &= 0 && \text{Porque } \left(\sqrt{c}\right)^2 = c \\
\left(x + \sqrt{c}\right)\left(x - \sqrt{c}\right) &= 0 && \text{Factorizamos} \\
x + \sqrt{c} = 0 &\ \text{ ó }\ x - \sqrt{c} = 0 \\
x = -\sqrt{c} &\ \text{ ó }\ x = \sqrt{c}.
\end{aligned}$$

Luego, las soluciones de $x^2 = c$ son $x = \pm\sqrt{c}$.

Observemos que el proceso anterior es equivalente a tomar raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación $x^2 = c$.

Ejemplo 71.1

1. Si $x^2 = 7$, entonces $x = \pm\sqrt{7}$.

   Las dos soluciones de la ecuación $x^2 = 7$ son $x = \sqrt{7}$ y $x = -\sqrt{7}$.

2. Si $z^2 = 18$, entonces $z = \pm\sqrt{18} = \pm\sqrt{2 \cdot 9} = \pm 3\sqrt{2}$.

   Las dos soluciones de la ecuación $z^2 = 18$ son $z = 3\sqrt{2}$ y $x = -3\sqrt{2}$.

3. Si $(x - 3)^2 = 13$, entonces $x - 3 = \pm\sqrt{13}$ y así $x = 3 \pm \sqrt{13}$.

   Las dos soluciones de la ecuación dada son $x = 3 + \sqrt{13}$ y $x = 3 - \sqrt{13}$.

Las ecuaciones anteriores son de la forma

$$(x \pm d)^2 = c \qquad (1)$$

con d constante y c constante positiva y las podemos resolver tomando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

Cuando en una ecuación cuadrática no es fácil hallar su solución por factorización, podemos resolverla llevándola a la forma de la ecuación (1).

El cuadrado perfecto del primer miembro de la ecuación (1) lo podemos obtener aplicando la técnica llamada **completar el cuadrado**, que explicamos a continuación:

Si tenemos la expresión $x^2 + bx$ y le sumamos $\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$ obtenemos $x^2 + bx + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2$, que es un trinomio cuadrado perfecto porque el primero y el tercer término son cuadrados perfectos, puesto que el primero es el cuadrado de x y el tercero es el cuadrado de $b/2$, y el segundo término es el doble producto de x y $b/2$, esto es, $2x\left(\dfrac{b}{2}\right) = bx$. Por tanto, este trinomio es el cuadrado del binomio $x + \dfrac{b}{2}$, es decir,

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2.$$

Observemos que $\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$ es el **cuadrado de la mitad del coeficiente del término en $\boldsymbol{x}$** y que el coeficiente del término en x^2 es 1.

Por ejemplo, si tenemos $x^2 - 3x$, para completar el cuadrado sumamos $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ y entonces $x^2 - 3x + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2$.

Resolvamos una ecuación cuadrática usando la técnica de completar el cuadrado.

Ejemplo 71.2

Resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 8x - 5 = 0$ completando el cuadrado.

Solución

Aislamos en un lado de la ecuación el término en x^2 y el término en x, luego procedemos a completar el cuadrado sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente del término en x, esto es, $\left(-\dfrac{8}{2}\right)^2$ y debemos sumarlo a ambos lados para no alterar la ecuación. Luego resolvemos la ecuación resultante.

$$x^2 - 8x = 5 \qquad \text{Sumamos 5 en ambos lados}$$

$$x^2 - 8x + \left(-\frac{8}{2}\right)^2 = 5 + \left(-\frac{8}{2}\right)^2 \qquad \text{Sumamos } \left(-\frac{8}{2}\right)^2 \text{ en ambos lados}$$

$$x^2 - 8x + 4^2 = 5 + 4^2$$

$$
\begin{aligned}
(x-4)^2 &= 21 \\
x-4 &= \pm\sqrt{21} && \text{Tomamos raíz cuadrada en ambos miembros} \\
x &= 4 \pm \sqrt{21} && \text{Despejamos } x.
\end{aligned}
$$

Luego, la ecuación tiene dos soluciones: $x = 4+\sqrt{21}$ y $x = 4-\sqrt{21}$.

Ejemplo 71.3

En cada numeral, resolver la ecuación cuadrática completando el cuadrado.

1. $x^2 + x - 1 = 0$.
2. $x^2 + 22x - 2 = 0$.
3. $y^2 - \frac{2}{3}y + 1 = 0$.

Solución

1. Aislamos el término en x^2 y el término en x en el primer lado de la ecuación y luego procedemos a completar el cuadrado para resolver la ecuación.

$$
\begin{aligned}
x^2 + x &= 1 && \text{Sumamos 1 en ambos lados} \\
x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 && \text{Sumamos } \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ en ambos lados} \\
\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &= 1 + \frac{1}{4} \\
\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4} \\
x + \frac{1}{2} &= \pm\sqrt{\frac{5}{4}} && \text{Tomamos raíz cuadrada en ambos miembros} \\
x &= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} && \text{Despejamos } x.
\end{aligned}
$$

Luego, $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ y $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ son las soluciones de la ecuación.

2. $$
\begin{aligned}
x^2 + 22x &= 2 && \text{Sumamos 2 en ambos lados} \\
x^2 + 22x + (11)^2 &= 2 + (11)^2 && \text{Sumamos } (11)^2 \text{ en ambos lados} \\
(x+11)^2 &= 2 + 121 \\
x + 11 &= \pm\sqrt{123} && \text{Tomamos raíz cuadrada en ambos miembros} \\
x &= -11 \pm \sqrt{123} && \text{Despejamos } x.
\end{aligned}
$$

Luego, $x = -11 + \sqrt{123}$ y $x = -11 - \sqrt{123}$ son las soluciones de la ecuación.

3. $$y^2 - \frac{2}{3}y = -1 \qquad \text{Restamos 1 en ambos lados}$$

$$y^2 - \frac{2}{3}y + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = -1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \qquad \text{Sumamos } \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \text{ en ambos lados}$$

$$\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = -1 + \frac{1}{9}$$

$$\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{8}{9}.$$

Observemos que la constante obtenida en el segundo lado de la ecuación es negativa. Como para cualquier valor de y, el primer lado de la ecuación es positivo o cero, entonces no existe ningún valor de y que satisfaga esta igualdad. Luego, la ecuación dada no tiene solución en los reales.

Notas:

- Cuando no es fácil resolver una ecuación cuadrática por factorización, es recomendable, antes de usar otro método para resolverla, chequear el discriminante de la ecuación para determinar si tiene o no solución en los reales. Por ejemplo, al calcular el discriminante de la última ecuación, $D = (-2/3)^2 - 4(1)(1) = 4/9 - 4 = -32/9$, nos damos cuenta, antes de intentar resolverla, que la ecuación no tiene solución en los reales.
- La técnica de completación de cuadrado fue utilizada para deducir la fórmula cuadrática.
- Si en una ecuación cuadrática el coeficiente del término en x^2 es distinto de 1, debemos dividir ambos miembros de la ecuación por este número para poder aplicar el método de completación de cuadrado.

Ejemplo 71.4

En cada numeral, resolver la ecuación cuadrática completando el cuadrado.

1. $2x^2 + x = 2.$
2. $3x^2 - 5x - 1 = 0.$

Solución

1. Dividimos ambos miembros de la ecuación entre 2 para que el coeficiente de x^2 sea igual a 1 y luego procedemos a resolverla completando el cuadrado.

$$x^2 + \frac{1}{2}x = 1 \qquad \text{Dividimos ambos miembros entre 2}$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \qquad \text{Sumamos } \left(\frac{1}{4}\right)^2 \text{ en ambos miembros}$$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{16}$$

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 &= \frac{17}{16} \\
x+\frac{1}{4} &= \pm\sqrt{\frac{17}{16}} \\
x+\frac{1}{4} &= \pm\frac{\sqrt{17}}{4} \\
x &= -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4}.
\end{aligned}$$

La ecuación tiene dos soluciones: $x = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$ y $x = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$.

2. Dividimos ambos miembros de la ecuación entre 3 para que el coeficiente de x^2 sea igual a 1 y luego procedemos a resolverla completando el cuadrado.

$$\begin{aligned}
x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} &= 0 && \text{Dividimos ambos miembros entre 3} \\
x^2 - \frac{5}{3}x &= \frac{1}{3} && \text{Sumamos } \frac{1}{3} \text{ en ambos miembros} \\
x^2 - \frac{5}{3}x + \left(-\frac{5}{6}\right)^2 &= \frac{1}{3} + \left(-\frac{5}{6}\right)^2 && \text{Sumamos } \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \text{ en ambos miembros} \\
\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 &= \frac{1}{3} + \frac{25}{36} \\
\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 &= \frac{12+25}{36} \\
\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 &= \frac{37}{36} \\
x - \frac{5}{6} &= \pm\sqrt{\frac{37}{36}} \\
x &= \frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{37}}{6}.
\end{aligned}$$

Luego, $x = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{37}}{6}$ y $x = \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{37}}{6}$ son las soluciones de la ecuación.

Ejercicios propuestos

En cada numeral, resolver la ecuación dada, completando el cuadrado.

1. $x^2 + 4x - 1 = 0$.
2. $2x^2 - 6x - 7 = 0$.

3. $4x^2 - 8x + 1 = 0$.
4. $2x^2 + x = 12$.
5. $4y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{1}{3} = 0$.

Respuestas

1. $-2 \pm \sqrt{5}$.
2. $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{23}}{2}$.
3. $1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. $-\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{97}}{4}$.
5. No tiene solución en los reales.

Lección 72

Ecuaciones de forma cuadrática

En esta lección resolveremos ecuaciones que no son cuadráticas pero que, mediante un procedimiento adecuado, pueden reducirse a una ecuación cuadrática y resolverse por los métodos ya descritos. Ilustraremos este procedimiento mediante algunos ejemplos resueltos y propondremos algunos ejercicios al lector para que al realizarlos adquiera destreza en esta estrategia de solución.

Por ejemplo, la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, no es cuadrática en x, pero si sustituimos x^2 por u tenemos que $u^2 = x^4$ y la ecuación se transforma en $u^2 - 13u + 36 = 0$ que sí es una ecuación cuadrática en la variable u, la cual sabemos resolver. El procedimiento que utilizamos para hacer esta transformación se conoce como **cambio de variable.**

Decimos que una ecuación es **de forma cuadrática** si mediante un **cambio de variable**, puede llevarse a la forma $au^2 + bu + c = 0$, donde u es una expresión en la variable inicial.

Ejemplo 72.1

Resolver las siguientes ecuaciones

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.
2. $(z+3)^2 - (z+3) - 20 = 0$.
3. $(2x+7)^2 - 3(2x+7) - 28 = 0$.

Solución

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ es una ecuación de forma cuadrática porque, como vimos, al hacer $u = x^2$ obtenemos $u^2 - 13u + 36 = 0$ que es una ecuación cuadrática en la variable u.

   Resolvamos primero la ecuación $u^2 - 13u + 36 = 0$.

$$\begin{aligned} u^2 - 13u + 36 &= 0 \\ (u-4)(u-9) &= 0 \\ u - 4 = 0 \text{ ó } u - 9 &= 0 \\ u = 4 \text{ ó } u &= 9. \end{aligned}$$

   Ahora reemplazamos los valores de u en la ecuación $u = x^2$ para hallar los valores de x que satisfacen la ecuación original, así:

   Si $u = 4$, como $u = x^2$ entonces $x^2 = 4$ y así, $x = \pm 2$.

Si $u = 9$, entonces $x^2 = 9$ y así, $x = \pm 3$.

Por tanto, la ecuación original tiene 4 soluciones o raíces: $x = 2$, $x = -2$, $x = 3$ y $x = -3$.

Verifiquemos que éstas son soluciones de la ecuación, reemplazando cada uno de los valores obtenidos en la ecuación original:

Si $x = 2$, entonces $2^4 - 13\,(2)^2 + 36 = 16 - 52 + 36 = -36 + 36 = 0$.

Si $x = -2$, entonces $(-2)^4 - 13\,(-2)^2 + 36 = 16 - 52 + 36 = -36 + 36 = 0$.

Si $x = 3$, entonces $3^4 - 13\,(3)^2 + 36 = 81 - 117 + 36 = -36 + 36 = 0$.

Si $x = -3$, entonces $(-3)^4 - 13\,(-3)^2 + 36 = 81 - 117 + 36 = -36 + 36 = 0$.

2. La ecuación$(z+3)^2 - (z+3) - 20 = 0$ es de forma cuadrática, porque si hacemos $u = z+3$ en dicha ecuación, obtenemos $u^2 - u - 20 = 0$ que es una ecuación cuadrática en u.

   Resolvamos la ecuación $u^2 - u - 20 = 0$:

$$
\begin{aligned}
u^2 - u - 20 &= 0 \\
(u+4)\,(u-5) &= 0 \\
u &= -4 \text{ ó } u = 5.
\end{aligned}
$$

   Ahora reemplazamos los valores de u en la ecuación $u = z + 3$ para hallar los valores de z que satisfacen la ecuación original, así:

   Si $u = -4$, entonces $-4 = z + 3$. Por tanto, $z = -7$.

   Si $u = 5$, tenemos que $5 = z + 3$. Luego, $z = 2$.

   Por tanto, los valores de z que satisfacen la ecuación $(z+3)^2 - (z+3) - 20 = 0$ son $z = -7$ y $z = 2$.

   Comprobamos que efectivamente éstas son las raíces de la ecuación, reemplazando cada uno de estos valores en la ecuación original:

   Si $z = -7$, entonces $(-7+3)^2 - (-7+3) - 20 = (-4)^2 + 4 - 20 = 16 + 4 - 20 = 0$.

   Con $z = 2$ tenemos que $(2+3)^2 - (2+3) - 20 = 25 - 5 - 20 = 0$.

3. Si en esta ecuación hacemos $z = 2x + 7$ obtenemos $z^2 - 3z - 28 = 0$ que es una ecuación cuadrática en z.

   Resolvamos esta ecuación:

$$
\begin{aligned}
z^2 - 3z - 28 &= 0 \\
(z+4)\,(z-7) &= 0 \\
z + 4 = 0 &\text{ ó } z - 7 = 0 \\
z &= -4 \text{ ó } z = 7.
\end{aligned}
$$

Ahora reemplazamos los valores de z en la ecuación $z = 2x + 7$ para hallar los valores de x que satisfacen la ecuación original, así:

Si $z = -4$, entonces $-4 = 2x + 7$, luego, $-11 = 2x$ y así $x = -\dfrac{11}{2}$.

Si $z = 7$, entonces $7 = 2x + 7$, luego, $0 = 2x$ y así $x = 0$.

Luego, las soluciones de la ecuación original son $x = -\dfrac{11}{2}$ y $x = 0$.

Comprobar la respuesta sustituyendo los valores de x en la ecuación original.

Ejemplo 72.2

Resolver la ecuación
$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + 4 = 5\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

Solución

Debemos tener en cuenta que $x \neq 1$ ya que $x = 1$ hace 0 los denominadores.

Si hacemos $u = \dfrac{x}{x-1}$, reemplazando en la ecuación original obtenemos $u^2 + 4 = 5u$.

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} u^2 + 4 &= 5u \\ u^2 + 4 - 5u &= 0 \\ (u-4)(u-1) &= 0 \\ u &= 4 \text{ ó } u = 1. \end{aligned}$$

Reemplacemos los valores de u en la ecuación $u = \dfrac{x}{x-1}$, para obtener los respectivos valores de x.

Para $u = 4$ tenemos la ecuación $\dfrac{x}{x-1} = 4$.

Mutiplicamos ambos miembros por $x - 1$

$$(x-1)\left(\frac{x}{x-1}\right) = 4(x-1).$$

Realizamos operaciones y tenemos

$$x = 4(x-1).$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} x - 4(x-1) &= 0 \\ x - 4x + 4 &= 0 \\ -3x &= -4 \\ x &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Para $u = 1$ tenemos la ecuación $\dfrac{x}{x-1} = 1.$

Mutiplicamos ambos miembros por $x - 1$:

$$(x-1)\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1\,(x-1)\,.$$

Realizamos operaciones y tenemos

$$x = x - 1.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} x - (x-1) &= 0 \\ x - x + 1 &= 0 \\ 0x &= -1. \end{aligned}$$

Esta ecuación no tiene solución porque cualquier número real multiplicado por 0 es igual a $0 \neq -1$.

Entonces la única solución de la ecuación original es $x = \dfrac{4}{3}$.

Comprobar que este valor de x satisface la ecuación original.

Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$
2. $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0.$
3. $(w-5)^2 - 4\,(w-5) + 4 = 0.$
4. $(1-2x)^2 - 2\,(1-2x) = 8.$

Respuestas

1. 1, -1, 2 y -2.
2. $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$, 3 y -3.
3. 7 de multiplicidad 2.
4. $\dfrac{3}{2}$ y $-\dfrac{3}{2}$.

Lección 73

Ecuaciones cuadráticas en dos variables

En esta lección trabajaremos con ecuaciones de segundo grado o cuadráticas en dos variables. Para una ecuación de este tipo, veremos cómo hallar sus soluciones y cómo trazar su gráfica en el plano cartesiano.

Una **ecuación de segundo grado o cuadrática en dos variables $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$** es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

con A, B, C, D, E y F constantes y A y C no simultáneamente iguales a cero.

Consideraremos aquí sólo las ecuaciones para las cuales $B = 0$, es decir, ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Si, por ejemplo, denotamos por y el área de un cuadrado y por x la longitud de su lado, entonces $y = x^2$. Esta ecuación puede escribirse como $x^2 - y = 0$, que tiene la forma de la ecuación de segundo grado en dos variables, con $A = 1$, $E = -1$ y las demás constantes iguales a cero.

Similarmente, si denotamos por y el área de un círculo y por x la longitud de su radio, entonces $y = \pi x^2$, o equivalentemente, $\pi x^2 - y = 0$, que tiene la forma de la ecuación de segundo grado en dos variables, con $A = \pi$, $E = -1$ y las demás constantes iguales a cero.

Recordemos que dada una ecuación en dos variables x y y, si al sustituir en la ecuación x por un número real a y y por un número real b se obtiene un enunciado verdadero, se dice que el par ordenado (a, b) es una **solución de la ecuación**.

Ejemplo 73.1

Consideremos la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ que es una ecuación segundo grado en x y y con $A = 1$, $C = 1$, $F = -25$ y las demás constantes iguales a cero.

Si sustituimos x por 0 y y por 5 en esta ecuación, obtenemos $0^2 + 5^2 = 25$ ó $25 = 25$ que es un enunciado verdadero. Luego, el par ordenado $(0, 5)$ es una solución de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$.

Si en la misma ecuación reemplazamos x por -5 y y por 0 obtenemos $(-5)^2 + 0 = 25$ ó $25 = 25$ que es un enunciado verdadero. Luego, el par ordenado $(-5, 0)$ es una solución de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$.

Al reemplazar x por 1 y y por 2, obtenemos $1^2+2^2=25$, ó $5=25$ que es un enunciado falso. Luego, el par ordenado $(1,2)$ no es solución de la ecuación $x^2+y^2=25$.

Consideremos nuevamente la ecuación $x^2+y^2=25$. Si, por ejemplo, asignamos a x el valor de 3 y lo sustituimos en la ecuación, obtenemos $3^2+y^2=25$ que es una ecuación cuadrática en la variable y. Resolvamos esta ecuación para y:

$$\begin{aligned}
9+y^2&=25\\
9+y^2-25&=0\\
y^2-16&=0\\
(y+4)(y-4)&=0\\
y&=-4 \text{ ó } y=4.
\end{aligned}$$

Esto es, cuando x vale 3, y vale -4 ó y vale 4. Entonces los pares ordenados $(3,-4)$ y $(3,4)$ son soluciones de la ecuación $x^2+y^2=25$, lo cual puede verificarse fácilmente reemplazando x por 3 y y por -4, ó x por 3 y y por 4 en la ecuación. De esta manera podemos hallar otras soluciones de la ecuación asignando valores a una de las variables y hallando los respectivos valores de la otra.

Es importante tener en cuenta que al asignarle valores a una de las variables, la expresión resultante debe tener sentido. Si, por ejemplo en la ecuación anterior asignamos a x el valor de 10 y reemplazamos en la ecuación original obtenemos $100+y^2=25$, ó $y^2=-75$, lo cual no tiene sentido, ya que cualquier número real elevado al cuadrado es un número positivo. Luego, ningún par ordenado cuya primera componente sea 10, es solución de la ecuación $x^2+y^2=25$.

Las ecuaciones de segundo grado en dos variables, a diferencia de las ecuaciones de segundo grado en una variable, tienen un número infinito de soluciones.

Gráfica de una ecuación de segundo grado en dos variables

Recordemos que dada cualquier ecuación en dos variables, la representación geométrica en el plano cartesiano de todos los pares ordenados de números reales que son soluciones de la ecuación constituye la gráfica de la ecuación.

Al igual que para las ecuaciones lineales en dos variables, para trazar la gráfica de una ecuación cuadrática en dos variables graficamos suficientes puntos para determinar a grandes rasgos la forma de la misma y luego aproximamos los puntos restantes trazando una "curva suave" por los puntos ya dibujados.

A medida que trabajemos con los casos más sencillos de este tipo de ecuaciones vamos identificando las formas de sus gráficas y ayudados de una tabla de valores, que se obtiene asignándole valores a una de las variables de la ecuación y hallando los correspondientes valores de la otra, podremos trazar una gráfica aproximada de la ecuación. Más adelante, en otros cursos de matemáticas estudiaremos en detalle la ecuación cuadrática con sus características y gráficas.

Ejemplo 73.2

Trazar la gráfica de la ecuación $x^2+y^2=25$.

Solución

$x^2 + y^2 = 25$ es una ecuación de segundo grado en x y y con $A = 1$, $C = 1$ y $F = -25$ y las demás constantes iguales a cero.

Para trazar su gráfica, podemos hallar primero los interceptos con los ejes coordenados. Si hacemos $x = 0$ obtenemos $y^2 = 25$, o sea, $y = \pm 5$. Es decir, la gráfica de la ecuación corta al eje y en los puntos $(0, 5)$ y $(0, -5)$. Si hacemos $y = 0$ tenemos $x = \pm 5$, o sea, la gráfica corta al eje x en los puntos $(-5, 0)$ y $(5, 0)$.

Luego construimos una tabla de valores, asignándole algunos valores a una de las variables, por ejemplo a x, y hallando los respectivos valores de y. Estos últimos se obtienen fácilmente si hallamos una ecuación equivalente a la ecuación original en la cual y esté expresada en términos de x. Así,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ y^2 &= 25 - x^2 \\ y &= \pm\sqrt{25 - x^2} \end{aligned}$$

La ecuación $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ es equivalente a la ecuación $x^2 + y^2 = 25$.

Ahora asignando algunos valores a x obtenemos los correspondientes valores de y, por ejemplo, si $x = -4$, entonces $y = \pm 3$, es decir, los puntos $(-4, 3)$ y $(-4, -3)$ están sobre la gráfica. Si $x = -3$ tenemos $y = \pm 4$ y los puntos $(-3, 4)$ y $(-3, -4)$ están sobre la gráfica. Construimos la siguiente tabla de valores:

x	-5	-4	-3	0	3	4	5
y	0	± 3	± 4	± 5	± 4	± 3	0

Dibujamos los puntos obtenidos en la tabla de valores y los unimos, como se muestra en la figura 73.1, mediante una "curva suave".

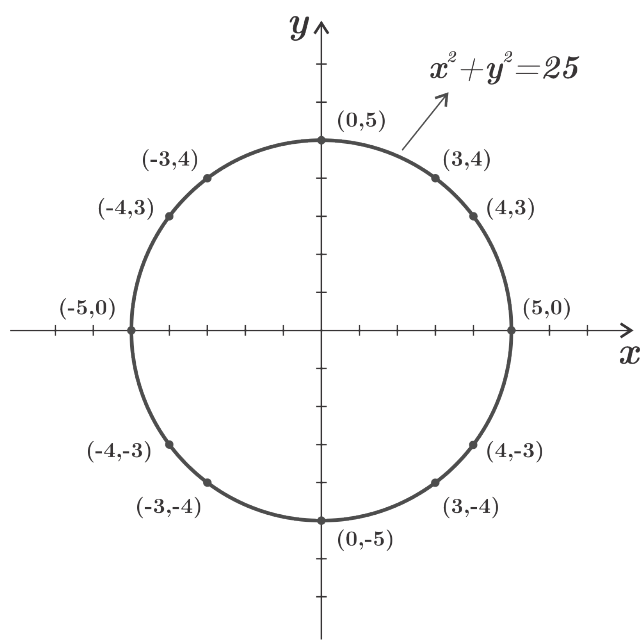

Figura 73.1

La gráfica de esta ecuación se conoce como circunferencia.

Observamos que x no pude tomar valores a la derecha de 5 ni a la izquierda de -5, porque obtendríamos la raíz cuadrada de un número negativo que no es un número real.

Ejemplo 73.3

Trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones:

1. $2x^2 - y = 3$.

2. $x^2 + 4y^2 = 16$.

Solución

1. $2x^2 - y = 3$ es una ecuación cuadrática en las variables x y y con $A = 2$, $E = -1$, $F = -3$ y las demás constantes iguales a cero.

   Para trazar su gráfica hallemos primero los interceptos con los ejes coordenados. Si $x = 0$ tenemos $y = -3$ y la gráfica corta al eje y en $(0, -3)$. Cuando $y = 0$ tenemos $2x^2 = 3$, es decir, $x^2 = \dfrac{3}{2}$, o sea $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ y racionalizando el denominador obtenemos $x = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$. Luego, la gráfica corta al eje x en los puntos $\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{6}, 0\right)$ y $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{6}, 0\right)$.

   Construyamos una tabla de valores, asignándole algunos valores a una de las variables, por ejemplo a x, y hallando los respectivos valores de y. Para ello expresemos y en términos de x, es decir, $y = 2x^2 - 3$.

   Ahora asignando algunos valores a x obtenemos los correspondientes valores de y. Por ejemplo, si $x = -2$ obtenemos $y = 5$, si $x = -1$ tenemos $y = -1$ y así construimos la siguiente tabla de valores:

x	-2	-1	0	1	2
y	5	-1	-3	-1	5

   Dibujamos los puntos obtenidos en la tabla de valores y los unimos, como se muestra en la figura 73.2, mediante una "curva suave".

   La gráfica de esta ecuación se conoce como parábola.

   Observamos que x puede tomar cualquier valor real y si damos a x valores negativos a la izquierda de -2, los valores de y son cada vez más grandes. Lo mismo pasa si le damos valores positivos a la derecha de 2. Así, la gráfica se abre indefinidamente hacia arriba.

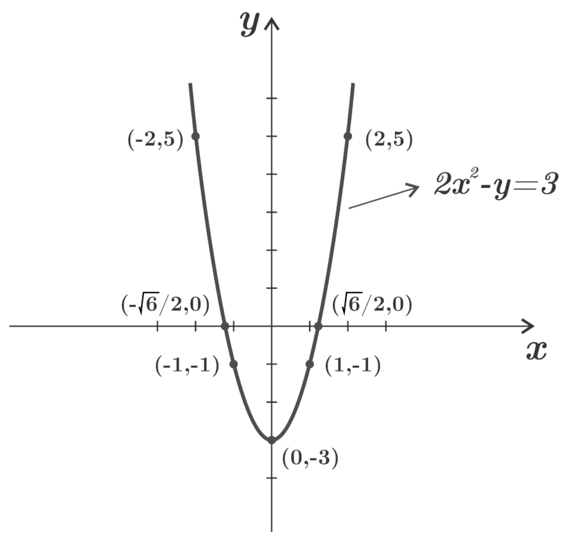

Figura 73.2

2. $x^2 + 4y^2 = 16$ es una ecuación cuadrática en las variables x y y con $A = 1$, $C = 4$, $F = -16$ y las demás constantes iguales a cero.

   Para trazar su gráfica hallemos primero los interceptos con los ejes coordenados. Si $x = 0$ tenemos $4y^2 = 16$, es decir, $y^2 = 4$. Luego $y = \pm 2$. Por tanto, la gráfica cruza al eje y en $(0, -2)$ y en $(0, 2)$. Cuando $y = 0$ tenemos $x^2 = 16$, es decir, $x = \pm 4$. Luego, la gráfica corta al eje x en los puntos $(-4, 0)$ y $(4, 0)$.

   Construyamos una tabla de valores, asignándole algunos valores a una de las variables, por ejemplo a x, y hallando los respectivos valores de y. Para ello expresemos y en términos de x. Así,

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 16 \\ 4y^2 &= 16 - x^2 \\ y^2 &= \frac{1}{4}\left(16 - x^2\right) \\ y &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \end{aligned}$$

   Ahora asignando algunos valores a x obtenemos los correspondientes valores de y. Por ejemplo, si $x = -4$ $y = 0$, si $x = -2$ tenemos $y = \pm\sqrt{3}$, es decir, los puntos $\left(-2, \sqrt{3}\right)$ y $\left(-2, -\sqrt{3}\right)$ están sobre la gráfica. Construimos la siguiente tabla de valores:

x	-4	-2	0	2	4
y	0	$\pm\sqrt{3}$	± 2	$\pm\sqrt{3}$	0

   Dibujamos los puntos obtenidos en la tabla de valores y los unimos, como se muestra en la figura 73.3, mediante una "curva suave".

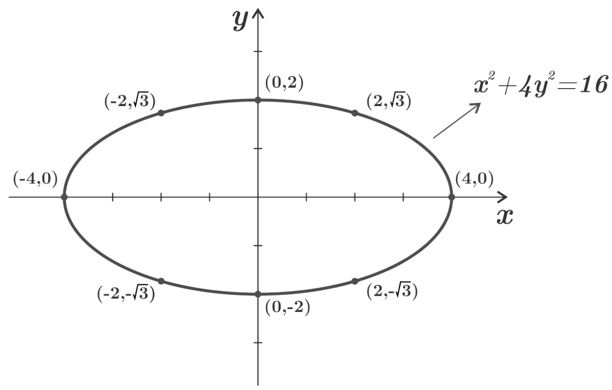

Figura 73.3

La gráfica de esta ecuación se conoce como elipse.

Observamos que x no puede tomar valores a la izquierda de -4 ni a la derecha de 4, porque obtendríamos la raíz cuadrada de un número negativo que no es un número real.

Ejercicios propuestos

En cada numeral, hallar los interceptos con los ejes coordenados y construir una tabla de valores para trazar la gráfica de las ecuaciones.

1. $x^2 + y^2 = 3$.
2. $x^2 + 4y^2 = 25$.
3. $x^2 + 2y = 9$.

Respuestas

1. Con el eje x: $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $\left(\sqrt{3}, 0\right)$. Con el eje y: $\left(0, \sqrt{3}\right)$, $\left(0, -\sqrt{3}\right)$.

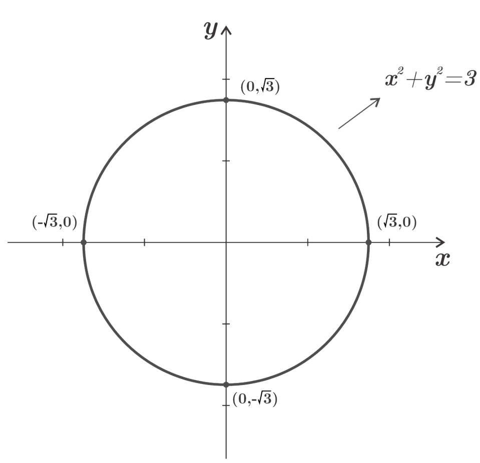

Figura 73.4

2. Con el eje x: $(-5, 0)$, $(5, 0)$. Con el eje y: $\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$, $\left(0, -\dfrac{5}{2}\right)$.

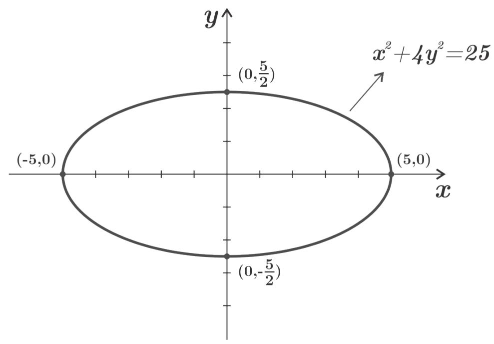

Figura 73.5

3. Con el eje x: $(-3,0)$, $(3,0)$. Con el eje y: $\left(0, \dfrac{9}{2}\right)$.

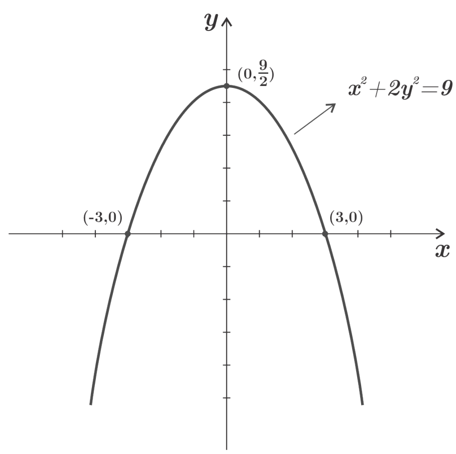

Figura 73.6

Lección 74

Representación gráfica de las raíces de una ecuación cuadrática

En esta lección representaremos en el plano cartesiano las soluciones de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, a partir de la gráfica de la ecuación de segundo grado en dos variables $y = ax^2 + bx + c$. Empezaremos ilustrando esta situación a partir de algunas de las gráficas de ecuaciones de segundo grado en dos variables que vimos en la lección anterior. Presentaremos algunos ejemplos adicionales y propondremos otros para que el lector resuelva.

Ejemplo 74.1

1. Si en la ecuación de $x^2 + y^2 = 25$ hacemos $y = 0$, obtenemos $x^2 = 25$ que es una ecuación cuadrática en la variable x, cuyas soluciones son $x = \pm 5$. Observamos en un ejemplo de la lección anterior, que estos valores corresponden a las abscisas de los interceptos de la gráfica de la ecuación con el eje x.

2. Si hacemos $y = 0$ en la ecuación $2x^2 - y = 3$, obtenemos $2x^2 - 3 = 0$ que es una ecuación cuadrática en la variable x, cuyas soluciones son $x = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$. Observamos en otro de los ejemplos vistos, que estos valores son las abscisas de los interceptos de la gráfica de la ecuación con el eje x.

3. Similarmente, al hacer $y = 0$ en la ecuación $x^2 + 4y^2 = 16$ obtenemos la ecuación cuadrática $x^2 = 16$ cuyas soluciones, $x = \pm 4$, corresponden a las abscisas de los interceptos de la gráfica de la ecuación con el eje x.

En general, las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, si las hay, son las abscisas de los interceptos de la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ con el eje x, es decir, son los puntos donde la gráfica de la ecuación corta al eje x.

La gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$ se llama parábola, como se verá en otros cursos. Esta parábola corta al eje x en dos puntos distintos si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos raíces reales distintas, en un punto si la ecuación tiene una sola raíz de multiplicidad 2 o no lo corta si la ecuación no tiene solución en los reales.

Ejemplo 74.2

Representar en el plano cartesiano las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1. $x^2 = 9$.

2. $x^2 + x - 6 = 0$.

3. $x^2 - 8x + 16 = 0$.

4. $2x - x^2 - 1 = 0$.

5. $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Solución

1. Las soluciones de la ecuación $x^2 = 9$ son $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.

   Tracemos la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 9$. Claramente, los interceptos de la gráfica de la ecuación con el eje x son $(-3, 0)$ y $(3, 0)$. Si hacemos $x = 0$ en la ecuación obtenemos $y = -9$ y así el intercepto de la gráfica con el eje y es $(0, -9)$.

   Construyamos una tabla de valores para encontrar otros puntos de la gráfica:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0

   Al unir los puntos, como se muestra en la figura 74.1, mediante una "curva suave" tenemos una parábola que corta al eje x en dos puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ cuyas abscisas son las soluciones de la ecuación $x^2 = 9$.

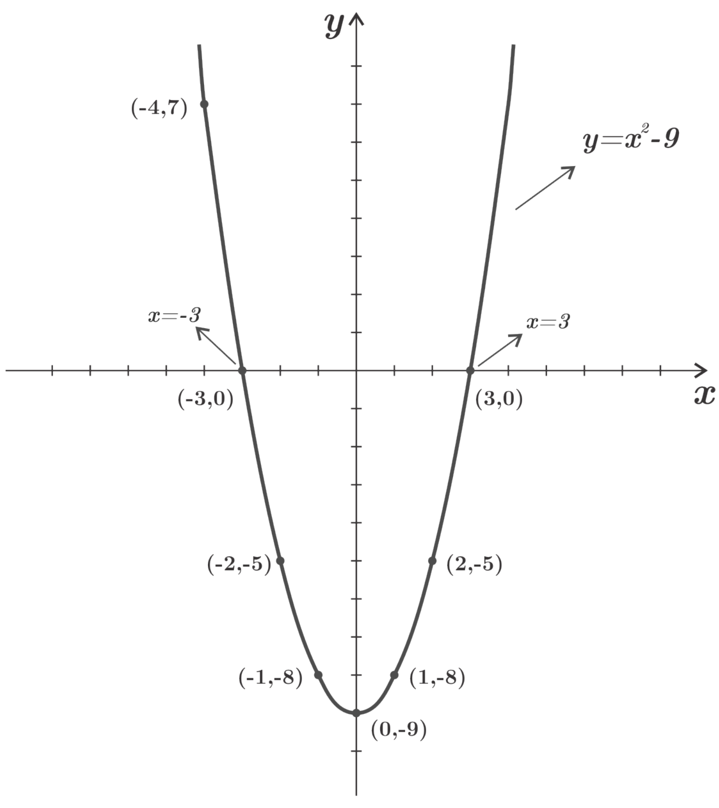

Figura 74.1

2. Resolvamos la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$
\begin{aligned}
(x-2)(x+3) &= 0 \\
x-2=0 \text{ ó } x+3 &= 0 \\
x=2 \text{ ó } x &= -\,3.
\end{aligned}
$$

Luego, las soluciones de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$ son $x = 2$ y $x = -3$.

Grafiquemos la ecuación $y = x^2 + x - 6$. Claramente, los interceptos con el eje x son $(2, 0)$ y $(-3, 0)$. Ahora, si $x = 0$, entonces $y = -6$ y así $(0, -6)$ es el intercepto de la gráfica con el eje y.

Construimos la tabla de valores:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

Al unir los puntos, como se muestra en la figura 74.2, por medio de una "curva suave", tenemos una parábola que corta al eje x en dos puntos $(2, 0)$ y $(-3, 0)$, cuyas abscisas son las dos soluciones distintas $x = 2$ y $x = -3$ de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$.

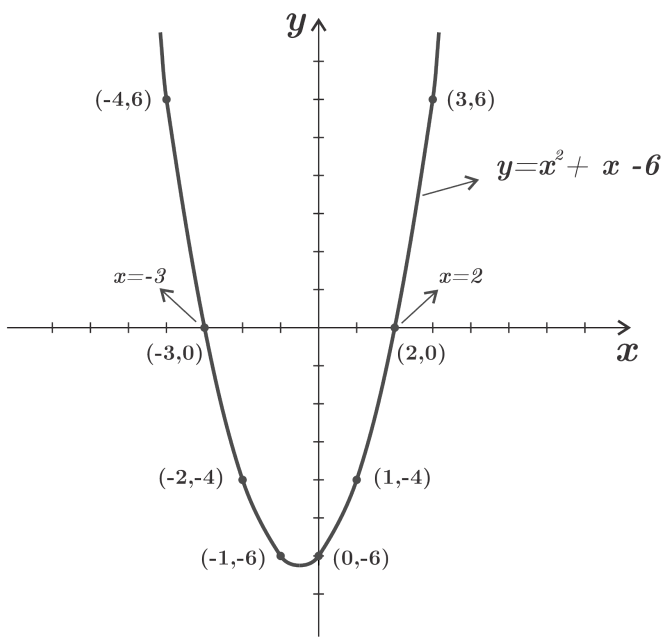

Figura 74.2

3. Resolvamos la ecuación $x^2 - 8x + 16 = 0$:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 8x + 16 &= 0 \\
(x-4)^2 &= 0 \\
x - 4 &= 0 \\
x &= 4.
\end{aligned}
$$

Luego, la ecuación $x^2 - 8x + 16 = 0$ tiene una raíz $x = 4$ de multiplicidad 2, ó, equivalentemente, tiene dos raíces iguales a 4.

Grafiquemos la ecuación $y = x^2 - 8x + 16$. Claramente, el intercepto con el eje x es $(4, 0)$. Ahora, si $x = 0$, entonces $y = 16$, y así, $(0, 16)$ es el intercepto de la gráfica con el eje y.

Construimos la tabla de valores:

x	0	1	2	3	4	5
y	16	9	4	1	0	1

Al unir los puntos, como se muestra en la figura 74.3, por medio de una "curva suave", tenemos una parábola que corta al eje x en el punto $(4, 0)$, cuya abscisa es la solución $x = 4$ de la ecuación $x^2 - 8x + 16 = 0$.

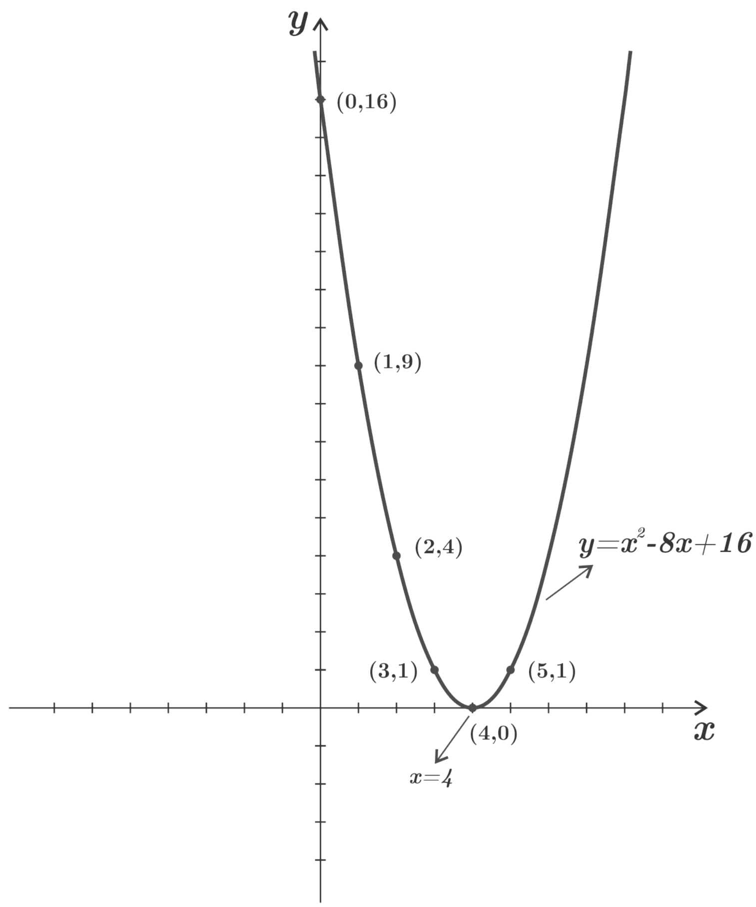

Figura 74.3

4. Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación $2x - x^2 - 1 = 0$ por -1 y ordenamos los términos obtenemos $x^2 - 2x + 1 = 0$, que es equivalente a $(x - 1)^2 = 0$, y su solución es $x = 1$, raíz de multiplicidad 2.

   Entonces, la gráfica de $y = 2x - x^2 - 1$ corta al eje x en el punto $(1, 0)$. Si hacemos $x = 0$ en la ecuación $y = 2x - x^2 - 1$, tenemos $y = -1$, y así el intercepto con el eje y es $(0, -1)$.

   Construyamos una tabla de valores para hallar otros puntos de la gráfica:

x	-1	0	1	2	3
y	-4	-1	0	-1	-4

Al unir los puntos, como se muestra en la figura 74.4, por medio de una "curva suave", tenemos una parábola que corta al eje x en un único punto $(1, 0)$, cuya abscisa 1 es la solución de la ecuación $2x - x^2 - 1 = 0$.

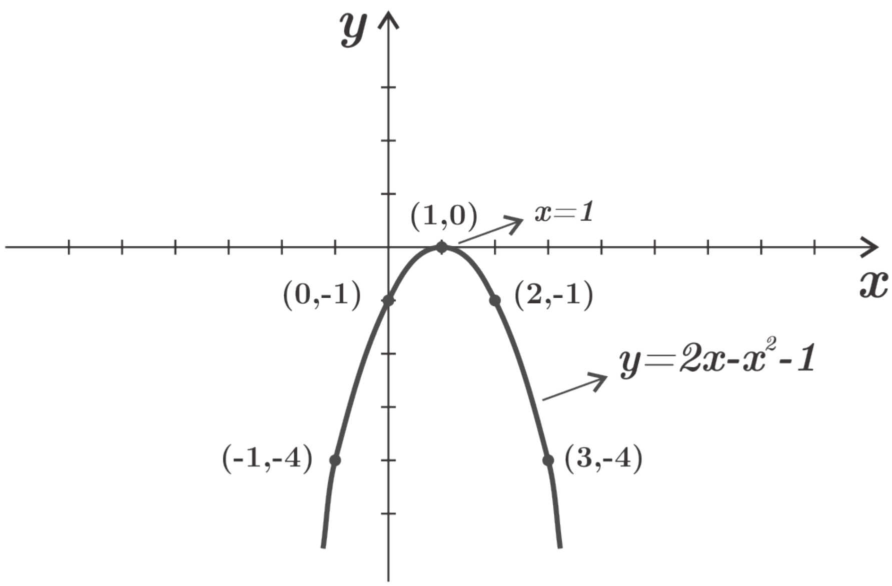

Figura 74.4

5. En la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$, el discriminante $D = (-2)^2 - 4\,(1)\,(2) = 4 - 8 = -4$ es un número negativo. Por tanto, la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$ no tiene solución en los números reales.

   Grafiquemos la ecuación $y = x^2 - 2x + 2$. Como la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$ no tiene solución en los reales, la gráfica no corta al eje x. Para hallar el intercepto con el eje y si hacemos $x = 0$, obtenemos $y = 2$. Luego, la gráfica corta al eje y en el punto $(0, 2)$.

   Construimos la tabla de valores:

x	-1	0	1	2	3
y	5	2	1	2	5

   Al unir los puntos, como se muestra en la figura 74.5, por medio de una "curva suave", tenemos una parábola que no corta al eje x, lo cual corresponde al hecho de que la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$ no tiene solución en los números reales.

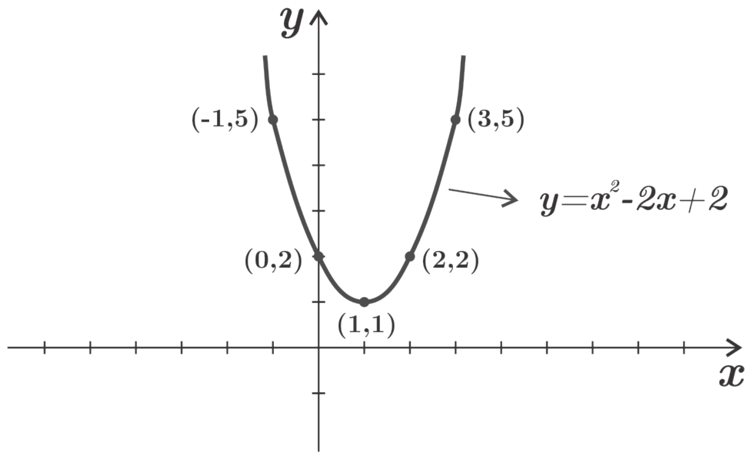

Figura 74.5

Ejercicios propuestos

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas y representar las soluciones en el plano cartesiano.

1. $x^2 - x = 0$.
2. $x^2 + 6x + 9 = 0$.
3. $3x^2 - 5x + 4 = 0$.

Solución

1. $x = 0$ y $x = 1$.

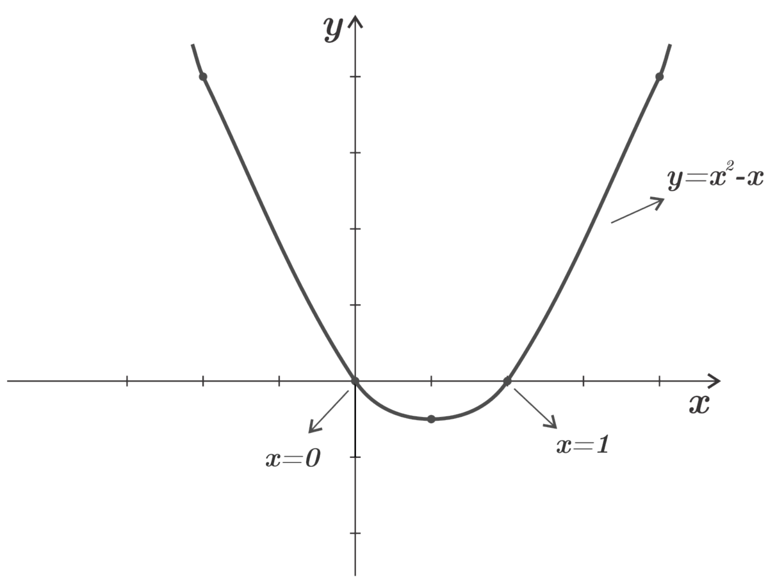

Figura 74.6

2. $x = -3$ de multiplicidad 2.

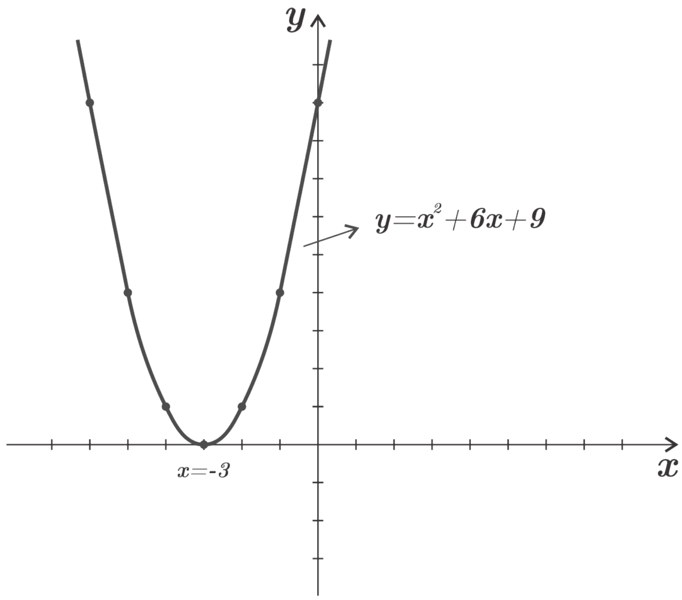

Figura 74.7

3. No tiene solución en los reales.

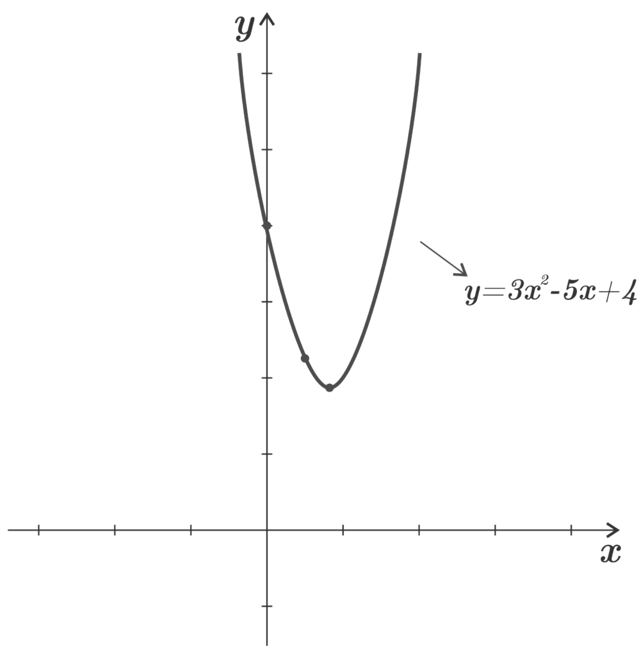

Figura 74.8

Lección 75

Solución de problemas con ecuaciones cuadráticas en una variable I

Como vimos en el tema de ecuaciones lineales, tanto en matemáticas como en otras ciencias, y aún en situaciones de la vida real, encontramos problemas que involucran dos o más cantidades relacionadas entre sí. Algunos de estos problemas al plantearlos matemáticamente, conducen a una ecuación cuadrática en una variable.

En esta lección vamos a trabajar con problemas que involucran el planteamiento y solución de ecuaciones cuadráticas en una variable.

Para resolver este tipo de problemas es conveniente que procedamos de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Leemos cuidadosamente el problema resaltando la información más importante y, cuando sea posible, hacemos un dibujo que ilustre la situación planteada, indicando las cantidades conocidas en el problema.
2. Identificamos claramente la cantidad o cantidades desconocidas (variables o incógnitas) que debemos encontrar. Por lo general, éstas aparecen en la pregunta que plantea el problema.

   Asignamos una letra a una de las cantidades desconocidas y, usando la información del problema, expresamos las otras cantidades en términos de dicha letra. Si es posible, las identificamos en el dibujo hecho en el paso 1.
3. Encontramos en el enunciado del problema o en el dibujo, la información que nos pemita relacionar las cantidades y las variables definidas en los pasos 1. y 2.
4. Planteamos una ecuación que nos permita expresar esta relación.
5. Resolvemos la ecuación, verificamos la respuesta y respondemos en palabras las preguntas planteadas.

Problema 75.1

A tiene 3 años más que B y la suma de los cuadrados de las edades de A y de B es 317 años. Hallar ambas edades.

Solución

Debemos hallar la edad de A y la de B.

Sea x la edad de B. Como A tiene 3 años más que B entonces la edad de A es $x+3$ y como la suma de los cuadrados de ambas edades es 317 entonces

$$x^2 + (x+3)^2 = 317.$$

Para hallar x debemos resolver esta ecuación:

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + 6x + 9 &= 317 \\ 2x^2 + 6x - 308 &= 0 \\ 2(x^2 + 3x - 154) &= 0 \\ x^2 + 3x - 154 &= 0. \end{aligned} \tag{75.1}$$

Descomponemos 154 en sus factores primos para tratar de factorizar el primer miembro de la ecuación:

$$\begin{array}{r|l} 154 & 2 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Como $154 = (14)(11)$ y $14 - 11 = 3$ entonces $x^2 + 3x - 154 = (x+14)(x-11)$. Así, la ecuación (75.1) se convierte en

$$(x+14)(x-11) = 0.$$

Luego, $x + 14 = 0$ ó $x - 11 = 0$ y así $x = -14$ ó $x = 11$.

De estas dos soluciones de la ecuación cuadrática (75.1), $x = -14$ no tiene sentido para el problema porque x, que representa la edad de B, no puede ser un número negativo. Luego, $x = 11$.

Por lo tanto, la edad de B es $x = 11$ años y la edad de A es $x + 3 = 11 + 3 = 14$ años.

Verificamos que la respuesta satisface las condiciones del problema: Efectivamente A tiene 3 años más que B y además la suma de los cuadrados de sus edades es $(14)^2 + (11)^2 = 196 + 121 = 317$.

Problema 75.2

El cuadrado de un número disminuido en 9 equivale a ocho veces la cantidad en que el número excede a 2. Hallar el número.

Solución

Sea x el número. La cantidad en que x excede a 2 es $x - 2$. Luego, como el cuadrado del número, x^2, disminuido en 9 equivale a ocho veces $x - 2$ entonces

$$x^2 - 9 = 8(x-2).$$

Resolvamos esta ecuación para hallar el valor de x :

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 8x - 16 \\ x^2 - 8x + 7 &= 0 \\ (x-7)(x-1) &= 0 \\ x - 7 = 0 \quad &\text{ó} \quad x - 1 = 0 \\ x = 7 \quad &\text{ó} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Como el número pedido es mayor que 2, entonces la única solución que tiene sentido para el problema es $x = 7$. Esto es, el número pedido es 7.

Verificar que este número satisface las condiciones del problema.

Problema 75.3

Hallar tres números enteros consecutivos tales que el cociente del mayor entre el menor es igual a los $\frac{3}{10}$ del número intermedio.

Solución

Si x es el número menor entonces $x+1$ y $x+2$ son los otros dos números.

Como $\frac{x+2}{x}$ es el cociente del número mayor entre el menor y éste equivale a $\frac{3}{10}$ del número intermedio, que es $x+1$, entonces

$$\frac{x+2}{x} = \frac{3}{10}(x+1).$$

Resolvamos esta ecuación para hallar el valor de x :

$$\begin{aligned} 10\,(x+2) &= 3x\,(x+1) \\ 10x + 20 &= 3x^2 + 3x \\ 0 &= 3x^2 - 7x - 20 \\ 0 &= (3x+5)(x-4) \\ 3x + 5 = 0 \text{ ó } x - 4 &= 0 \\ x = -\frac{5}{3} \text{ ó } x &= 4. \end{aligned}$$

La solución $x = -\frac{5}{3}$ se descarta porque el significado de números consecutivos sólo aplica a números enteros. Luego, el número menor es 4, el intermedio $4+1 = 5$ y el mayor $4+2 = 6$.

Verificar que la solución satisface las condiciones del problema.

Problema 75.4

Se compró cierto número de cartillas de Ecología para los estudiantes de la clase por \$150.000. Si cada cartilla hubiera costado \$1.000 más se habrían comprado 5 cartillas menos con los \$150.000. ¿Cuántas cartillas se compraron y cuánto costó cada una?

Solución

Sea x el número de cartillas compradas.

Si se compraron x cartillas por \$150.000, cada cartilla costó $\dfrac{150.000}{x}$ pesos.

Si cada cartilla hubiera costado \$1.000 más, se habrían comprado $x-5$ cartillas con el mismo dinero y cada cartilla habría costado $\dfrac{150.000}{x-5}$. Como su valor habría sido \$1.000 más que el precio de compra inicial, tendríamos

$$\frac{150.000}{x-5} = \frac{150.000}{x} + 1.000.$$

Resolvamos esta ecuación para obtener el valor de x:

$$\begin{aligned} 150.000x &= 150.000(x-5) + 1.000x(x-5) \\ 150x &= 150(x-5) + x(x-5) \\ 150x &= 150x - 750 + x^2 - 5x \\ 0 &= x^2 - 5x - 750. \end{aligned} \tag{75.2}$$

Descompongamos 750 en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 750 & 2 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Como $750 = (30)(25)$ y $30 - 25 = 5$, la ecuación (75.2) se puede escribir como

$$(x-30)(x+25) = 0.$$

Así, $x-30 = 0$ ó $x+25 = 0$ y las soluciones de la ecuación (75.2) son $x = 30$ y $x = -25$.

Descartamos $x = -25$. ¿Por qué? Luego la solución de la ecuación (75.2) que tiene sentido para el problema es $x = 30$.

Por lo tanto, se compraron 30 cartillas y cada una costó $\dfrac{150.000}{30} = 5.000$ pesos.

Verificar que la respuesta satisface las condiciones del problema.

Problemas propuestos

1. El producto de dos números enteros consecutivos es igual a su suma aumentada en 19. Hallar los números.
2. Hallar las edades de dos hermanos si la diferencia de sus edades es 7 años y su suma multiplicada por la edad del hermano menor es igual a 184.
3. Dos trabajadores lavan un auto en 24 minutos. Si cada uno de ellos lava el auto por separado, uno tarda 20 minutos más que el otro. ¿En qué tiempo lava el auto cada trabajador?
4. Un colegio compró cierto número de cuadernos por 180.000 pesos. Si hubiera comprado 6 cuadernos menos por el mismo dinero, cada cuaderno le habría costado $1.000 más. ¿Cuántos cuadernos compró y cuanto le costó cada uno?

Respuestas

1. 5, 6 y -4, -3.
2. 15 años y 8 años.
3. 40 minutos y 60 minutos.
4. 36, $5.000.

Lección 76

Solución de problemas con ecuaciones cuadráticas en una variable II

En esta lección resolveremos otros problemas con ecuaciones cuadráticas, que involucran algunos conceptos elementales de geometría, como el perímetro y el área de triángulos y rectángulos y el teorema de Pitágoras.

Problema 76.1

Un salón de clase tiene forma rectangular y su largo excede a su ancho en 4 metros. Si tanto el largo como el ancho se aumentan en 4 metros, el área del salón será el doble. Hallar las dimensiones del salón.

Solución

Debemos hallar el largo y el ancho del salón de clase.

Si x es el ancho, en metros, del salón entonces

$$\begin{aligned} x+4 &= \text{ largo del salón} \\ x(x+4) &= \text{ área del salón.} \end{aligned}$$

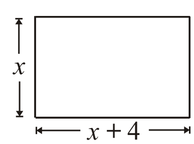

Figura 76.1

Si tanto el largo como el ancho se aumentan en 4 metros tenemos:

$$\begin{aligned} x+4 &= \text{ ancho aumentado del salón} \\ (x+4)+4 = x+8 &= \text{ largo aumentado del salón} \\ (x+4)(x+8) &= \text{ área aumentada del salón.} \end{aligned}$$

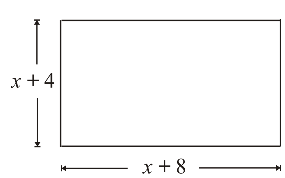

Figura 76.2

Como al aumentar el largo y el ancho en 4 metros, el área se duplica tenemos que

$$\text{área aumentada del salón} = 2(\text{área original del salón })$$
$$(x+4)(x+8) = 2x(x+4).$$

Efectuamos operaciones, simplificamos y resolvemos esta ecuación para hallar el valor de x:

$$\begin{aligned} x^2 + 12x + 32 &= 2x^2 + 8x \\ 0 &= (2x^2 - x^2) + (8x - 12x) - 32 \\ 0 &= x^2 - 4x - 32 \\ 0 &= (x-8)(x+4). \end{aligned}$$

Luego, $x - 8 = 0$ ó $x + 4 = 0$ y así $x = 8$ ó $x = -4$.

La segunda solución no tiene sentido para el problema porque x, que representa el largo del salón, no puede ser un número negativo. Luego, $x = 8$.

Por lo tanto, el salón tiene 8 metros de ancho y 12 metros de largo.

Verificar que la respuesta satisface las condiciones del problema.

Problema 76.2

Un tercio del área de un triángulo rectángulo es igual a 200 cm^2. Si uno de sus catetos es 10 cm mayor que el otro cateto, hallar la longitud de la hipotenusa.

Solución

Como conocemos la relación entre los catetos del triángulo y su área, entonces podemos hallar las longitudes de los catetos y usar el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de la hipotenusa.

Sea x la longitud de un cateto. Entonces la longitud del otro cateto es $x + 10$.

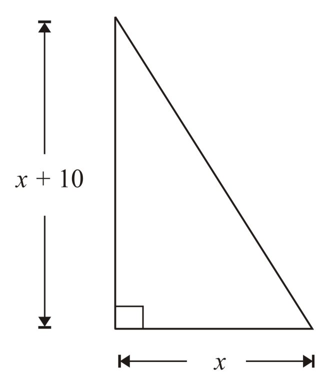

Figura 76.3

Como el área del triángulo $= \dfrac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) = \dfrac{1}{2}x(x+10)$ y $\dfrac{1}{3}(\text{área del triángulo}) = 200$ cm^2 entonces

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x(x+10)\right] = 200.$$

Resolvamos esta ecuación para hallar x:

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\left(x^2+10x\right)&=200\\ x^2+10x&=1.200\\ x^2+10x-1.200&=0\\ (x+40)(x-30)&=0\\ x+40=0 \text{ ó } x-30&=0\\ x=-40 \text{ ó } x&=30.\end{aligned}$$

Como x, longitud de un cateto, es un número positivo la única solución que tiene sentido para el problema es $x=30$. Luego los catetos del triángulo miden 30 cm y $30+10=40$ cm.

Para hallar la hipotenusa, recordemos que en un triángulo rectángulo, por el teorema de Pitágoras, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos. Entonces

$$\begin{aligned}(\text{longitud hipotenusa})^2&=(\text{longitud cateto})^2+(\text{longitud cateto})^2\\ &=(30)^2+(40)^2\\ &=900+1.600\\ &=2.500.\end{aligned}$$

Luego, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2.500}=50$ centímetros.

Problema 76.3

Un agricultor tiene una huerta de forma rectangular rodeada por una cerca de 200 pies de longitud. Determinar las dimensiones de la huerta si su área es de 2.400 pies cuadrados.

Solución

Debemos hallar las dimensiones de la huerta, es decir, su largo y su ancho.

Sea x el largo, en pies, de la huerta.

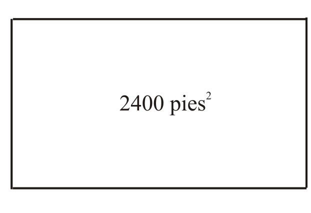

Figura 76.4

Expresemos el ancho de la huerta en términos de x :

Como la longitud de la cerca es igual al perímetro de la huerta y éste es la suma de las longitudes de sus lados entonces:

$200 =$ perímetro de la huerta

$200 = 2$(largo de la huerta) $+2$(ancho de la huerta)

$200 = 2x + 2$(ancho de la huerta)

$200 - 2x = 2$(ancho de la huerta)

ancho de la huerta $= \dfrac{200-2x}{2} = 100 - x.$

Ahora, como el área de la huerta es 2.400 pies cuadrados, planteamos la ecuación

$$x(100 - x) = 2.400.$$

Para hallar x, resolvemos esta ecuación:

$$\begin{aligned}100x - x^2 &= 2.400\\ -x^2 + 100x - 2.400 &= 0\\ x^2 - 100x + 2.400 &= 0\\ (x-60)(x-40) &= 0\\ x = 60 \;\; \text{ó} \;\; x &= 40.\end{aligned}$$

Si el largo de la huerta es 60 pies entonces el ancho es $100 - 60 = 40$ pies. Si el largo es 40 pies entonces el ancho es $100 - 40 = 60$ pies. Luego, las dimensiones de la huerta son 60 pies y 40 pies sin importar cual es el ancho y cual el largo de la huerta.

Es fácil verificar que ambas respuestas satisfacen las condiciones del problema.

Problema 76.4

Un terreno rectangular de dimensiones 26 metros por 30 metros, se rodea por un camino de ancho uniforme. Si el área del camino es de 240 metros cuadrados, determinar su ancho.

Solución

Sea x la medida del ancho del camino, en metros.

Como las dimensiones del terreno rectangular son 26 m por 30 m, su área es

$$(26)(30)\ \text{m}^2 = 780\ \text{m}^2.$$

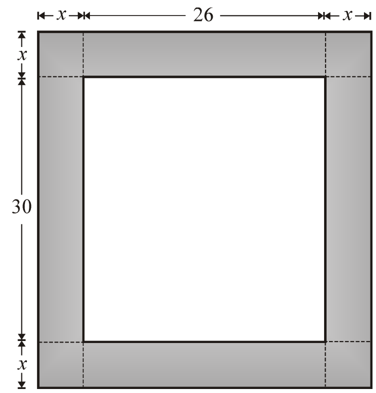

Figura 76.5

Del dibujo vemos que al considerar el terreno, incluyendo el camino, nos resulta un rectángulo cuyas dimensiones son $26 + 2x$ m por $30 + 2x$ m y su área sería

$$(26 + 2x)(30 + 2x) = \text{área del terreno} + \text{área del camino} = 780 + 240.$$

Resolvamos esta ecuación para encontrar x :

$$\begin{aligned}
(26 + 2x)(30 + 2x) &= 780 + 240 \\
780 + 112x + 4x^2 &= 780 + 240 \\
4x^2 + 112x - 240 &= 0 \\
4(x^2 + 28x - 60) &= 0 \\
x^2 + 28x - 60 &= 0 \\
(x + 30)(x - 2) &= 0 \\
x &= -30 \text{ ó } x = 2.
\end{aligned}$$

La solución $x = -30$ se descarta porque x, el ancho del camino, no puede ser un número negativo.

Luego, el ancho del camino es 2 metros.

Otra forma de resolver el problema es plantear la ecuación considerando solamente el área del camino así: $2(26 + 2x)x + 2(30)x = 240$. Comprobar que esta ecuación conduce a la misma solución del problema.

Problemas propuestos

1. Si la longitud del lado de un cuadrado se aumentara en 6 unidades, su área se multiplicaría por 4. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?
2. Si el área de un triángulo rectángulo es 120 unidades cuadradas y uno de los catetos es 4 unidades mayor que el doble del otro cateto, hallar la longitud de los catetos y de la hipotenusa del triángulo.

3. Si el área de un rectángulo es 1.200 centímetros cuadrados y su perímetro es 140 centímetros, hallar sus dimensiones.

Respuestas

1. 6
2. 10, 24 y 26.
3. 30 cm, 40 cm.

Lección 77

Solución de problemas con ecuaciones cuadráticas en una variable III

En esta lección continuaremos resolviendo problemas con ecuaciones cuadráticas en una variable. Algunos de ellos involucran los conceptos de volumen y área superficial de un sólido, que explicaremos en su solución.

Problema 77.1

¿Qué dimensiones debe tener una lámina de lata rectangular, cuyo largo es el doble de su ancho, si se va a utilizar para construir una caja sin tapa, cortando cuadrados de 3 pulgadas de lado en cada esquina, cuyo volumen debe ser 60 pulgadas cúbicas?

Solución

Sea x el ancho, en pulgadas, de la lámina de lata; entonces su largo es $2x$. Como en cada esquina de la lámina se recorta un cuadrado de 3 pulgadas de lado, las dimensiones de la base rectangular de la caja son ancho $x - 6$ y largo $2x - 6$.

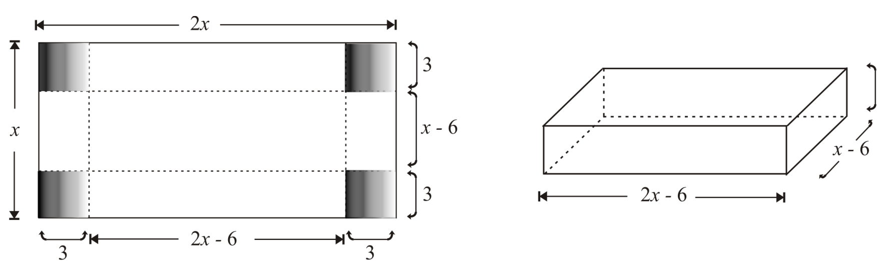

Figura 77.1

El volumen de la caja es largo por ancho por alto. Como la altura de la caja es 3 pulgadas y su volumen debe ser 60 pulgadas cúbicas, entonces

$$(2x - 6)(x - 6)(3) = 60.$$

Resolvamos esta ecuación para hallar x :

$$3(2x - 6)(x - 6) = 60$$
$$(2x - 6)(x - 6) = 20$$

$$2x^2 - 18x + 36 = 20$$
$$2x^2 - 18x + 16 = 0$$
$$2(x^2 - 9x + 8) = 0$$
$$x^2 - 9x + 8 = 0$$
$$(x - 8)(x - 1) = 0.$$

Así, las soluciones de la ecuación son $x = 8$ y $x = 1$.

Observamos que el segundo valor de x no tiene sentido para el problema porque si el ancho de la lámina es de 1 pulgada no podemos recortar los cuadrados en las esquinas de 3 pulgadas de lado.

Luego, la lámina debe tener 8 pulgadas de ancho y 16 de largo.

Así al recortar la lámina con estas dimensiones, se arma una caja de $10 \cdot 2 \cdot 3$ pulgadas cúbicas, cuyo volumen es 60 pulgadas cúbicas.

Problema 77.2

Se tienen 100 centímetros cuadrados de cartón para construir una caja de base cuadrada, sin tapa, cuya altura sea 10 centímetros más grande que el lado de la base. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja si se usa todo el material disponible?

Solución

Sea x la longitud del lado de la base de la caja, en centímetros. Entonces la altura de la caja es $x + 10$.

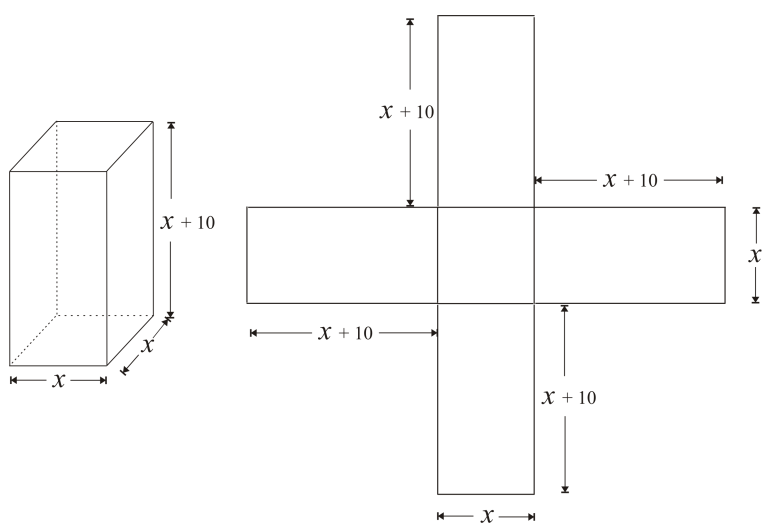

Figura 77.2

Como se tienen 100 cm^2 de cartón para construir la caja, su área superficial debe ser igual a este valor.

El área superficial de la caja es la suma de las áreas de la base y de los costados de la caja. El área de la base es x^2 y la de cada costado es $x(x + 10)$. Como la caja no tiene tapa, entonces

$$\begin{aligned}\text{Área superficial de la caja} &= \text{área de la base} + 4(\text{área de un costado})\\ 100 &= x^2 + 4x(x + 10).\end{aligned}$$

Resolvamos esta ecuación para x:

$$\begin{aligned}100 &= x^2 + 4x^2 + 40x\\ 0 &= 5x^2 + 40x - 100\\ 0 &= 5(x^2 + 8x - 20)\\ 0 &= x^2 + 8x - 20\\ 0 &= (x + 10)(x - 2)\\ x = -10 \ \text{ ó } \ x &= 2.\end{aligned}$$

Descartamos $x = -10$ porque x no puede ser un número negativo.

Luego, la longitud del lado de la base es 2 centímetros. Así entonces la caja que se puede construir con los 100 centímetros cuadrados de cartón tiene base cuadrada de 2 centímetros de lado y 12 centímetros de altura.

Verificando, el área superficial de la caja con estas dimensiones es $2^2+4(2)(12) = 4+96 = 100$ centímetros cuadrados .

Problema 77.3

Un trozo de alambre de 100 pulgadas de largo, se corta en dos y cada pedazo se dobla para que tome la forma de un cuadrado. Si la suma de las áreas de los cuadrados construidos es 397 pulgadas cuadradas, encontrar la longitud de cada pedazo de alambre.

Solución

Sea x la longitud, en pulgadas, de uno de los pedazos de alambre. Entonces $100 - x$ es la longitud del otro pedazo.

El cuadrado construido con el trozo de alambre de longitud x tiene sus lados de longitud $\dfrac{x}{4}$ y su área es $\left(\dfrac{x}{4}\right)^2$.

El cuadrado construido con el pedazo de longitud $100-x$ tiene sus lados de longitud $\dfrac{100-x}{4}$ y su área es $\left(\dfrac{100-x}{4}\right)^2$.

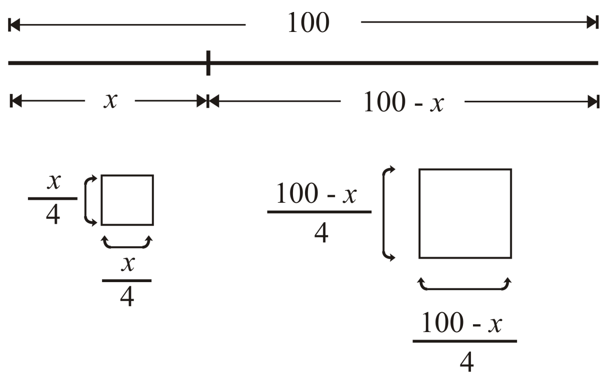

Figura 77.3

Como la suma de las áreas de los dos cuadrados es 397 pulgadas cuadradas entonces

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{100-x}{4}\right)^2 = 397.$$

Para hallar x resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{16} + \frac{(100-x)^2}{16} &= 397 \\ x^2 + (100-x)^2 &= 6.352 \\ x^2 + 10.000 - 200x + x^2 &= 6.352 \\ 2x^2 - 200x + 3.648 &= 0 \\ 2(x^2 - 100x + 1.824) &= 0 \\ x^2 - 100x + 1.824 &= 0. \end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación utilizamos la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = -100$ y $c = 1.824$:

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{10.000 - 4(1)(1.824)}}{2} = \frac{100 \pm \sqrt{2.704}}{2} = \frac{100 \pm 52}{2}.$$

Entonces las raíces de la ecuación son

$$x = \frac{100+52}{2} = \frac{152}{2} = 76 \text{ y } x = \frac{100-52}{2} = \frac{48}{2} = 24.$$

Por tanto, si un trozo de alambre mide 76 pulgadas, el otro mide $100 - 76 = 24$ pulgadas. Y si uno de los trozos de alambre mide 24 pulgadas, el otro mide $100 - 24 = 76$ pulgadas. Esto es, las longitudes de los dos pedazos de alambre que satisfacen las condiciones del problema son 76 pulgadas y 24 pulgadas.

Problema 77.4

El producto de las edades de un padre y su hijo es 352 y si la edad del padre se divide entre la del hijo, el cociente es 2 y el residuo es 10. Hallar ambas edades.

Solución

Sea x la edad del padre. Como (edad del padre)(edad del hijo)$=352$ entonces la edad del hijo es $\dfrac{352}{\text{edad del padre}} = \dfrac{352}{x}$.

Si la edad del padre se divide entre la del hijo, el cociente es 2 y el residuo es 10, esto es,

$$\frac{x}{\frac{352}{x}} = 2 + \frac{10}{\frac{352}{x}}.$$

Simplifiquemos esta ecuación y resolvámosla para x :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{352} &= 2 + \frac{10x}{352} \\ x^2 &= 704 + 10x \\ x^2 - 10x - 704 &= 0 \\ (x-32)(x+22) &= 0. \end{aligned}$$

Luego, las dos soluciones de la ecuación son $x = 32$ y $x = -22$. Esta última se descarta porque no tiene sentido para el problema.

Luego, la edad del padre es 32 años y la del hijo es $\dfrac{352}{32} = 11$ años.

Efectivamente, el producto de las edades es $(32)(11) = 352$ y $\dfrac{32}{11} = 2 + \dfrac{10}{11}$.

Problema 77.5

Los gastos de un paseo son \$900.000 pesos. Si dejaran de ir 3 personas, cada una de las restantes tendría que pagar \$10.000 más. ¿Cuántas personas van al paseo y cuánto paga cada una?

Solución

Sea x el número de personas que van al paseo. Como los gastos del paseo son \$900.000 entonces cada persona paga $\dfrac{900.000}{x}$ pesos.

Si dejaran de ir 3 personas, cada una de las restantes pagaría $\dfrac{900.000}{x-3}$ pesos que equivaldría a pagar \$10.000 más sobre el valor inicial, esto es,

$$\frac{900.000}{x-3} = \frac{900.000}{x} + 10.000.$$

Resolvamos esta ecuación para hallar x :

$$\begin{aligned}
900.000x &= 900.000(x-3) + 10.000x(x-3)\\
90x &= 90(x-3) + x(x-3)\\
90x &= 90x - 270 + x^2 - 3x\\
0 &= x^2 - 3x - 270\\
0 &= (x+15)(x-18)\\
x+15 = 0 &\text{ ó } x-18=0\\
x = -15 &\text{ ó } x = 18.
\end{aligned}$$

De estas dos soluciones de la ecuación cuadrática, $x = -15$ no tiene sentido para el problema porque x, número de personas que van al paseo, no puede ser un número negativo.

Por lo tanto, al paseo van 18 personas y cada una paga $\dfrac{900.000}{18} = 50.000$ pesos.

Verificar que la solución satisface las condiciones del problema.

Problemas propuestos

1. Con una hoja cuadrada de cartón se va a fabricar una caja de base cuadrada y sin tapa, cortando cuadrados de 3 pulgadas de lado en cada esquina y doblando los lados. Si la caja debe tener un volumen de 48 pulgadas cúbicas, qué dimensiones debe tener la hoja que se va a usar?
2. El cociente de dividir 84 entre cierto número excede en 5 a este número. Hallar el número.
3. Compré cierto número de paquetes de galletas por \$40.000 y cierto número de cajas de chocolates por \$40.000. Cada caja de chocolates me costó \$1.000 más que cada paquete de galletas. ¿Cuántos paquetes de galletas compré y a qué precio si el número de paquetes de galletas excede al de cajas de chocolates en 2?

Respuestas

1. 10 pulgadas de lado.
2. 7.
3. 10, \$4.000.

Lección 78

Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, usando la fórmula cuadrática

Hasta ahora hemos factorizado trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ cuando son trinomios cuadrados perfectos o hallando parejas de factores enteros de a y c que combinados apropiadamente nos dan b. En esta lección veremos cómo, al hallar las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c = 0$ utilizando la fórmula cuadrática, podemos factorizar el polinomio ax^2+bx+c.

Consideremos la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Si $a \neq 0$, utilizando la fórmula cuadrática encontramos que sus raíces o soluciones son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Llamemos x_1 y x_2 a estas raíces:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Sumemos estas raíces:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-2b}{2a} \\
&= -\frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

Multipliquemos las raíces:

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{(2a)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Luego,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Veamos ahora como factorizar $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, utilizando x_1 y x_2.

Si en el primer miembro de la ecuación $ax^2+bx+c = 0$ sacamos factor común a, tenemos

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

y como $a \neq 0$, entonces

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Para factorizar el polinomio de la izquierda debemos hallar dos números cuyo producto sea $\frac{c}{a}$ y cuya suma sea $\frac{b}{a}$. Como $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, entonces $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$ y como $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ tenemos que

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1 \cdot x_2 \\ &= x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 \\ &= x\,(x - x_1) - x_2\,(x - x_1) \\ &= (x - x_1)\,(x - x_2)\,. \end{aligned}$$

Entonces, $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$

Luego, para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, hallamos las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ y escribimos el trinomio como el producto de los tres factores a, $x - x_1$ y $x - x_2$. Es decir,

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

Ejemplo 78.1

Factorizar los siguientes polinomios, utilizando la fórmula cuadrática:

1. $x^2 - 16x + 63$.
2. $2x^2 + x - 6$.
3. $6x^2 + 7x - 10$.

Solución

1. Para factorizar el polinomio $x^2 - 16x + 63$ hallamos las raíces de la ecuación $x^2 - 16x + 63 = 0$, aplicando la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = -16$ y $c = 63$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(1)(63)}}{2(1)} \\ &= \frac{16 \pm \sqrt{256 - 252}}{2} \\ &= \frac{16 \pm \sqrt{4}}{2} \\ &= \frac{16 \pm 2}{2} \\ &= 8 \pm 1. \end{aligned}$$

Luego, $x_1 = 9$ y $x_2 = 7$ y por tanto,

$$x^2 - 16x + 63 = 1(x-9)(x-7) = (x-9)(x-7).$$

2. Para factorizar el polinomio $2x^2 + x - 6$ hallamos las raíces de la ecuación $2x^2 + x - 6 = 0$, aplicando la fórmula cuadrática con $a = 2$, $b = 1$ y $c = -6$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4} \\ &= \frac{-1 \pm 7}{4}. \end{aligned}$$

Luego, $x_1 = \dfrac{-1+7}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ y $x_2 = \dfrac{-1-7}{4} = \dfrac{-8}{4} = -2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 6 &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - (-2)) \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 2) \\ &= 2\left(\frac{2x-3}{2}\right)(x + 2) \\ &= (2x-3)(x+2). \end{aligned}$$

3. Para factorizar el polinomio $6x^2 + 7x - 10$ hallamos las raíces de la ecuación $6x^2 + 7x - 10 = 0$, aplicando la fórmula cuadrática con $a = 6$, $b = 7$ y $c = -10$.

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(6)(-10)}}{2(6)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-7 \pm \sqrt{49+240}}{12} \\
&= \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{12} \\
&= \frac{-7 \pm 17}{12}.
\end{aligned}
$$

Luego, $x_1 = \dfrac{-7+17}{12} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$ y $x_2 = \dfrac{-7-17}{12} = \dfrac{-24}{12} = -2$. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
6x^2 + 7x - 10 &= 6\left(x - \frac{5}{6}\right)(x - (-2)) \\
&= 6\left(x - \frac{5}{6}\right)(x+2) \\
&= 6\left(\frac{6x-5}{6}\right)(x+2) \\
&= (6x-5)(x+2).
\end{aligned}
$$

Ejemplo 78.2

Factorizar, usando la fórmula cuadrática, los siguientes polinomios:

1. $5 - 9x - 2x^2$.
2. $6x^2 - mx - 2m^2$.
3. $x^2 + 2x - 1$.
4. $4x^2 - 8x + 5$.

Solución

1. Para factorizar el polinomio $5-9x-2x^2$ hallamos las raíces de la ecuación $5-9x-2x^2 = 0$, aplicando la fórmula cuadrática con $a = -2$, $b = -9$ y $c = 5$.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(-2)(5)}}{2(-2)} \\
&= \frac{9 \pm \sqrt{81+40}}{-4} \\
&= \frac{9 \pm \sqrt{121}}{-4} \\
&= \frac{9 \pm 11}{-4}.
\end{aligned}
$$

Luego, $x_1 = \dfrac{9+11}{-4} = \dfrac{20}{-4} = -5$ y $x_2 = \dfrac{9-11}{-4} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$. Por tanto,

$$
5 - 9x - 2x^2 = -2(x - (-5))\left(x - \frac{1}{2}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\left(x+5\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\\
&= -2\left(x+5\right)\left(\frac{2x-1}{2}\right)\\
&= -\left(x+5\right)\left(2x-1\right)\\
&= \left(x+5\right)\left(1-2x\right).
\end{aligned}
$$

2. Para factorizar el polinomio $6x^2 - mx - 2m^2$ hallamos las raíces de la ecuacion $6x^2 - mx - 2m^2 = 0$, aplicando la fórmula cuadrática con $a = 6$, $b = -m$ y $c = -2m^2$.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-\left(-m\right) \pm \sqrt{\left(-m\right)^2 - 4\left(6\right)\left(-2m^2\right)}}{2\left(6\right)}\\
&= \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 48m^2}}{12}\\
&= \frac{m \pm \sqrt{49m^2}}{12}\\
&= \frac{m \pm 7m}{12}.
\end{aligned}
$$

Luego, $x_1 = \dfrac{m+7m}{12} = \dfrac{8m}{12} = \dfrac{2m}{3}$ y $x_2 = \dfrac{m-7m}{12} = \dfrac{-6m}{12} = -\dfrac{m}{2}$. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
6x^2 - mx - 2m^2 &= 6\left(x - \frac{2m}{3}\right)\left(x - \left(-\frac{m}{2}\right)\right)\\
&= 6\left(\frac{3x-2m}{3}\right)\left(\frac{2x+m}{2}\right)\\
&= \left(3x-2m\right)\left(2x+m\right).
\end{aligned}
$$

3. Para factorizar el polinomio x^2+2x-1 hallamos las raíces de la ecuacion $x^2+2x-1 = 0$, aplicando la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = 2$ y $c = -1$.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\left(1\right)\left(-1\right)}}{2\left(1\right)}\\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2}\\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}\\
&= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{2\left(-1 \pm \sqrt{2}\right)}{2}
\end{aligned}
$$

$$= -1 \pm \sqrt{2}.$$

Luego, $x_1 = -1 + \sqrt{2}$ y $x_2 = -1 - \sqrt{2}$. Por tanto,

$$x^2 + 2x - 1 = \left(x - \left(-1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(-1 - \sqrt{2}\right)\right) = \left(x + 1 - \sqrt{2}\right)\left(x + 1 + \sqrt{2}\right).$$

4. Para factorizar el polinomio $4x^2 - 8x + 5$ hallamos las raíces de la ecuacion $4x^2 - 8x + 5 = 0$, aplicando la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = -8$ y $c = 5$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(5)}}{2(4)} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 80}}{8} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{-16}}{2}. \end{aligned}$$

Como $D = -16$ la ecuación no tiene solución en los reales. Por tanto no podemos factorizar el polinomio en los reales.

Nota: Es recomendable, antes de utilizar la fórmula cuadrática analizar el discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ para evitar cálculos innecesarios cuando la ecuación no tenga soluciones reales.

Ejercicios propuestos

Factorizar, usando la fórmula cuadrática, los siguientes polinomios:

1. $x^2 + 24x + 143$.
2. $5x^2 + 41x + 8$.
3. $5 + 8x - 36x^2$.
4. $4 + 13x - 12x^2$.
5. $5x^2 + 22xy - 15y^2$.

Solución

1. $(x + 11)(x + 13)$.
2. $(5x + 1)(x + 8)$.
3. $(18x + 5)(1 - 2x)$.
4. $(4x + 1)(4 - 3x)$.
5. $(5x - 3y)(x + 5y)$.

Lección 79

Ecuaciones con radicales

En esta lección trabajaremos con algunas ecuaciones en las cuales la variable aparece en el radicando de uno o más radicales y aprenderemos cómo transformarlas en una ecuación lineal o cuadrática para poder resolverlas por los métodos ya estudiados.

Una ecuación en la que uno o ambos miembros contienen expresiones radicales que tienen la variable en el radicando se llama **ecuación con radicales**.

Para resolver este tipo de ecuaciones a menudo utilizamos el procedimiento que consiste en elevar ambos lados de la ecuación a un exponente entero positivo y para ello hacemos uso del siguiente resultado:

Si P y Q son expresiones algebraicas y n es un entero positivo, entonces

$$\text{Toda solución de } P = Q \text{ es también solución de } P^n = Q^n.$$

Esto es, el conjunto de soluciones de la nueva ecuación que se obtiene al elevar al exponente n ambos lados, contiene todas las soluciones de la ecuación original $P = Q$.

La afirmación anterior en el "sentido contrario ", es decir, su recíproco, no es cierta. Esto es, puede haber soluciones de la ecuación $P^n = Q^n$ que no lo son de la ecuación original $P = Q$. Por ejemplo, si en la ecuación $x = 3$ elevamos al cuadrado ambos lados obtenemos $x^2 = 9$, que es una ecuación con dos soluciones 3 y -3, mientras la ecuación original sólo tiene a 3 como solución.

Cualquier solución de $P^n = Q^n$ que no sea solución de $P = Q$, se llama **solución extraña**.

Debido a que con este procedimiento pueden surgir soluciones extrañas es indispensable comprobar que toda solución que se obtenga sea solución de la ecuación original.

Si la ecuación tiene un solo término con un radical que contiene la variable, para resolverla podemos proceder así:

- Aislamos el radical en un miembro de la ecuación.
- Elevamos ambos miembros a un exponente igual al índice del radical.
- Resolvemos la ecuación resultante.
- Chequeamos si las soluciones obtenidas son soluciones de la ecuación original y descartamos las soluciones extrañas, si las hay.

Ejemplo 79.1

En cada numeral, resolver la ecuación con radicales.

1. $\sqrt{x+2} = 3x - 4$.
2. $x = 5\sqrt{2x-2} + 13$.
3. $\sqrt[3]{x^2+x-4} = 2$.
4. $\sqrt[5]{2x^2+1} - 2 = 0$.

Solución

1. Como tenemos un radical de índice 2 en el primer lado de la ecuación, elevamos al cuadrado en ambos lados y resolvemos la ecuación resultante, así:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= (3x-4)^2 && \text{Elevamos al cuadrado ambos lados}\\
x+2 &= 9x^2 - 24x + 16 && \text{Porque } \left(\sqrt{a}\right)^2 = a\\
0 &= 9x^2 - 25x + 14 && \text{Trasponemos términos y simplificamos}\\
0 &= (x-2)(9x-7) && \text{Factorizamos}\\
x = 2 \ \text{ ó } \ x &= \frac{7}{9}.
\end{aligned}$$

Veamos si $x = 2$ y $x = 7/9$ son soluciones de la ecuación original:

Si $x = 2$: $\sqrt{2+2} = 3(2) - 4$; $\sqrt{4} = 2$; $2 = 2$. Luego, $x = 2$ es solución de la ecuación.

Si $x = 7/9$: $\sqrt{\frac{7}{9} + 2} = 3\left(\frac{7}{9}\right) - 4$; $\sqrt{\frac{25}{9}} = -\frac{5}{3}$; $\frac{5}{3} \neq -\frac{5}{3}$. Luego, $x = \frac{7}{9}$ no es solución de la ecuación dada, es decir, es una solución extraña de la ecuación.

Por tanto, la única solución de la ecuación original es $x = 2$.

2. Para aislar el radical en un lado de la ecuación, restamos 13 en ambos lados y luego procedemos como en el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}
x - 13 &= 5\sqrt{2x-2} && \text{Aislamos el radical en un lado de la ecuación}\\
(x-13)^2 &= \left(5\sqrt{2x-2}\right)^2 && \text{Elevamos al cuadrado ambos lados}\\
x^2 - 26x + 169 &= 25(2x-2)\\
x^2 - 26x + 169 &= 50x - 50\\
x^2 - 76x + 219 &= 0\\
(x-3)(x-73) &= 0\\
x = 3 \ \text{ ó } \ x &= 73.
\end{aligned}$$

Veamos si estos dos valores son también solución de la ecuación original:

Si $x = 3$: $3 = 5\sqrt{2(3)-2} + 13$; $3 = 5\sqrt{4} + 13$; $3 \neq 23$. Luego, $x = 3$ no es solución de la ecuación.

Si $x = 73$: $73 = 5\sqrt{2(73)-2} + 13$; $73 = 5\sqrt{144} + 13$; $73 = 5(12) + 13$; $73 = 73$. Por tanto, $x = 73$ es solución de la ecuación.

Por tanto, la única solución de la ecuación dada es $x = 73$.

3. Como tenemos una radical de índice 3 en el primer lado de la ecuación debemos elevar al cubo en ambos lados y luego resolver la ecuación resultante, así:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{x^2+x-4}\right)^3 &= 2^3 && \text{Elevamos al cubo ambos lados}\\
x^2+x-4 &= 8 && \text{Porque } \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a\\
x^2+x-12 &= 0 &&\\
(x+4)(x-3) &= 0 &&\\
x = -4 \;\text{ ó }\; x &= 3. &&
\end{aligned}$$

Veamos si estas soluciones lo son también de la ecuación original:

Si $x = -4$: $\sqrt[3]{(-4)^2 + (-4) - 4} = 2$; $\sqrt[3]{8} = 2$; $2 = 2$. Luego, $x = -4$ es solución de la ecuación.

Si $x = 3$: $\sqrt[3]{3^2 + 3 - 4} = 2$; $\sqrt[3]{8} = 2$; $2 = 2$. Luego, $x = 3$ es solución de la ecuación.

Luego, las soluciones de la ecuación dada son $x = -4$ y $x = 3$.

4. Sumamos 2 en ambos lados para aislar el radical en el primer lado de la ecuación y como tenemos un radical de índice 5, elevamos al exponente 5 en ambos lados de la ecuación y luego resolvemos la ecuación resultante, así:

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{2x^2+1} &= 2 && \text{Aislamos el radical en un lado de la ecuación}\\
\left(\sqrt[5]{2x^2+1}\right)^5 &= 2^5 && \text{Elevamos ambos lados al exponente 5}\\
2x^2+1 &= 32 &&\\
x^2 &= \frac{31}{2} &&\\
x &= \pm\sqrt{\frac{31}{2}} &&\\
x &= \pm\frac{\sqrt{62}}{2} && \text{Racionalizando el denominador.}
\end{aligned}$$

Veamos si los valores obtenidos son soluciones de la ecuación original:

Si $x = \pm\frac{\sqrt{62}}{2}$: $\sqrt[5]{2\left(\pm\frac{\sqrt{62}}{2}\right)^2 + 1} - 2 = 0$; $\sqrt[5]{2\left(\frac{62}{4}\right) + 1} - 2 = 0$; $\sqrt[5]{32} = 2$; $2 = 2$.

Luego, $x = -\frac{\sqrt{62}}{2}$ y $x = \frac{\sqrt{62}}{2}$ son las soluciones de la ecuación dada.

Si la ecuación tiene más de un término con radicales, es necesario repetir, las veces que se requiera, el proceso de aislar un radical en un lado de la ecuación y elevar ambos lados a un exponente apropiado hasta obtener una ecuación sin radicales. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 79.2

En cada numeral, resolver la ecuación con radicales.

1. $2\sqrt{x} - \sqrt{x+5} = 1$.
2. $\sqrt{3x+1} + \sqrt{3x-2} = \sqrt{4x+5}$.

Solución

1. $$\begin{aligned}
2\sqrt{x} - 1 &= \sqrt{x+5} && \text{Aislamos uno de los radicales en un lado de la ecuación}\\
\left(2\sqrt{x} - 1\right)^2 &= \left(\sqrt{x+5}\right)^2 && \text{Elevamos al cuadrado ambos lados}\\
4x - 4\sqrt{x} + 1 &= x + 5 &&\\
3x - 4 &= 4\sqrt{x} && \text{Aislamos el radical que nos queda en un lado de la ecuación}\\
(3x-4)^2 &= \left(4\sqrt{x}\right)^2 && \text{Elevamos al cuadrado ambos lados}\\
9x^2 - 24x + 16 &= 16x &&\\
9x^2 - 40x + 16 &= 0 &&\\
(9x-4)(x-4) &= 0 &&\\
x &= \frac{4}{9} \text{ ó } x = 4. &&
\end{aligned}$$

Veamos si los valores obtenidos son soluciones de la ecuación original:

Si $x = \frac{4}{9}$: $2\sqrt{\frac{4}{9}} - \sqrt{\frac{4}{9} + 5} = 1$; $2\left(\frac{2}{3}\right) - \sqrt{\frac{49}{9}} = 1$; $\frac{4}{3} - \frac{7}{3} = 1$; $-1 \neq 1$. Luego, $x = \frac{4}{9}$ no es solución de la ecuación.

Si $x = 4$: $2\sqrt{4} - \sqrt{4+5} = 1$; $2(2) - 3 = 1$; $1 = 1$. Luego, $x = 4$ es solución de la ecuación.

Por tanto, la única solución de la ecuación dada es $x = 4$.

2. Tenemos una ecuación con tres términos con radicales. Como uno de los radicales está aislado en el segundo lado de la ecuación, elevamos ambos lados al cuadrado y luego repetimos este proceso con el nuevo radical que resulte.

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-2}\right)^2 &= \left(\sqrt{4x+5}\right)^2 \quad \text{Elevamos al cuadrado ambos lados}\\
3x+1+2\sqrt{(3x+1)(3x-2)}+3x-2 &= 4x+5\\
2\sqrt{9x^2-3x-2} &= -2x+6\\
\sqrt{9x^2-3x-2} &= -x+3\\
\left(\sqrt{9x^2-3x-2}\right)^2 &= (-x+3)^2 \quad \text{Elevamos al cuadrado ambos lados}\\
9x^2-3x-2 &= x^2-6x+9\\
8x^2+3x-11 &= 0\\
(x-1)(8x+11) &= 0\\
x=1 \ \text{ ó } \ x &= -\frac{11}{8}.
\end{aligned}
$$

Veamos si los valores obtenidos son soluciones de la ecuación original:

Si $x=1$: $\sqrt{3(1)+1}+\sqrt{3(1)-2}=\sqrt{4(1)+5}$; $\sqrt{4}+\sqrt{1}=\sqrt{9}$; $2+1=3$; $3=3$. Luego, $x=1$ es solución de la ecuación.

Observemos que al reemplazar x por $-\frac{11}{8}$ obtenemos como radicandos números negativos. Como las raíces son de índice par, $x=-\frac{11}{8}$ no es solución de la ecuación.

Por tanto, la única solución de la ecuación dada es $x=1$.

Ejercicios propuestos

En cada numeral, resolver la ecuación dada.

1. $2x=\sqrt{5x+9}-3$
2. $\sqrt[4]{x^2-2x+8}=2$.
3. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}=3$.
4. $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3-x}=\sqrt{2x}$.
5. $\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x-2}=5$.

Respuestas

1. 0.
2. -2.

3. 1.
4. 2.
5. 3.

Lección 80

Ecuaciones con exponentes racionales

En esta lección veremos cómo resolver ecuaciones en las que aparecen una o más potencias de la variable con exponentes racionales. Algunas de estas ecuaciones son de forma cuadrática, otras se pueden resolver usando la factorización de expresiones con exponentes racionales y otras pueden expresarse con radicales. En todos estos casos utilizaremos los métodos ya estudiados.

Algunas ecuaciones en una variable x con exponentes racionales son de forma cuadrática, ya que al realizar un cambio de variable apropiado pueden llevarse a la forma $au^2 + bu + c = 0$, con u una expresión en la variable inicial x.

Ejemplo 80.1

En cada numeral, resolver la ecuación.

1. $3x^{2/3} + 8x^{1/3} - 3 = 0$.
2. $2y^{1/3} - 5y^{1/6} + 2 = 0$.
3. $(y^2 - 1) - 4\left(y^2 - 1\right)^{1/2} + 3 = 0$.

Solución

1. Si en la ecuación hacemos $u = x^{1/3}$ entonces $u^2 = \left(x^{1/3}\right)^2 = x^{2/3}$ y obtenemos $3u^2 + 8u - 3 = 0$ que es una ecuación cuadrática en u.

   Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 3u^2 + 8u - 3 &= 0 \\ (3u - 1)(u + 3) &= 0 \\ 3u - 1 = 0 \;\; &\text{ó} \;\; u + 3 = 0 \\ u = \frac{1}{3} \;\; &\text{ó} \;\; u = -3. \end{aligned}$$

   Como $u = x^{1/3}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} x^{1/3} &= \frac{1}{3} \;\; \text{ó} \;\; x^{1/3} = -3 \\ x &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \;\; \text{ó} \;\; x = (-3)^3 && \text{Elevamos al cubo en ambos lados de cada ecuación} \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{27} \quad \text{ó} \quad x = -27.$$

Veamos si estos dos valores son soluciones de la ecuación original:

Si $x = \dfrac{1}{27}$: $3\left(\dfrac{1}{27}\right)^{2/3} + 8\left(\dfrac{1}{27}\right)^{1/3} - 3 = 3\left(\dfrac{1}{9}\right) + 8\left(\dfrac{1}{3}\right) - 3 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{3} - 3 = 0$. Luego, $x = \dfrac{1}{27}$ es solución de la ecuación.

Si $x = -27$: $3(-27)^{2/3} + 8(-27)^{1/3} - 3 = 3(9) + 8(-3) - 3 = 27 - 24 - 3 = 0$. Luego, $x = -27$ es solución de la ecuación.

Por tanto, la ecuación dada tiene dos soluciones: $x = \dfrac{1}{27}$ y $x = -27$.

2. Si hacemos $u = y^{1/6}$ en la ecuación, como $u^2 = \left(y^{1/6}\right)^2 = y^{1/3}$ obtenemos $2u^2 - 5u + 2 = 0$, que es una ecuación cuadrática en u .

   Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 2u^2 - 5u + 2 &= 0 \\ (2u-1)(u-2) &= 0 \\ 2u - 1 = 0 \quad &\text{ó} \quad u - 2 = 0 \\ u = \frac{1}{2} \quad &\text{ó} \quad u = 2. \end{aligned}$$

   Como $u = y^{1/6}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} y^{1/6} = \frac{1}{2} \quad &\text{ó} \quad y^{1/6} = 2 \\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \quad &\text{ó} \quad y = 2^6 \qquad \text{Elevamos al exponente 6 en ambos lados de cada ecuación} \\ y = \frac{1}{64} \quad &\text{ó} \quad y = 64. \end{aligned}$$

   Veamos si estos dos valores son soluciones de la ecuación original:

   Si $y = \dfrac{1}{64}$: $2\left(\dfrac{1}{64}\right)^{1/3} - 5\left(\dfrac{1}{64}\right)^{1/6} + 2 = 2\left(\dfrac{1}{4}\right) - 5\left(\dfrac{1}{2}\right) + 2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2} + 2 = -2 + 2 = 0$. Luego, $y = \dfrac{1}{64}$ es solución de la ecuación dada.

   Si $y = 64$: $2(64)^{1/3} - 5(64)^{1/6} + 2 = 2(4) - 5(2) + 2 = 8 - 10 + 2 = 0$. Luego, $y = 64$ es solución de la ecuación dada.

   Por tanto, las soluciones de la ecuación dada son $y = \dfrac{1}{64}$ y $y = 64$.

3. Como $\left(y^2-1\right)^{1/2}=\sqrt{y^2-1}$, la ecuación dada también se puede escribir como

$$\left(y^2-1\right)-4\sqrt{y^2-1}+3=0.$$

Ésta es una ecuación de forma cuadrática con radicales pues si hacemos $u=\sqrt{y^2-1}$ y como $\left(\sqrt{y^2-1}\right)^2=y^2-1$ obtenemos $u^2-4u+3=0$, que es una ecuación cuadrática en u.

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} u^2-4u+3&=0\\ (u-3)\,(u-1)&=0\\ u=3 \text{ ó } u&=1. \end{aligned}$$

Como $u=\sqrt{y^2-1}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2-1}=3 &\text{ ó } \sqrt{y^2-1}=1\\ y^2-1=3^2 &\text{ ó } y^2-1=1^2 && \text{Elevamos al cuadrado ambos lados de cada ecuación}\\ y^2=10 &\text{ ó } y^2=2\\ y=\pm\sqrt{10} &\text{ ó } y=\pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Veamos si $y=\pm\sqrt{10}$ y $y=\pm\sqrt{2}$ satisfacen la ecuación original:

Si $y=\pm\sqrt{10}$: $9-4\sqrt{9}+3=9-4(3)+3=0$. Luego, $y=\pm\sqrt{10}$ son soluciones de la ecuación original.

Si $y=\pm\sqrt{2}$: $1-4\sqrt{1}+3=1-4+3=0$. Luego, $y=\pm\sqrt{2}$ son soluciones de la ecuación original.

Por tanto, la ecuación dada tiene cuatro soluciones: $y=\sqrt{10}$, $y=-\sqrt{10}$, $y=\sqrt{2}$ y $y=-\sqrt{2}$.

Teniendo en cuenta que $b^{m/n}=\sqrt[n]{b^m}$, algunas ecuaciones con exponentes racionales se pueden expresar usando radicales y resolverlas como ecuaciones con radicales, como hicimos en el ejemplo anterior.

Otras ecuaciones con exponentes racionales se pueden resolver obteniendo una ecuación equivalente en la que uno de los miembros de la ecuación sea 0 y el otro miembro se pueda factorizar. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 80.2

En cada numeral, resolver la ecuación.

1. $x^{1/2}-x^{3/2}=0$.
2. $y^{3/2}=4y$.
3. $x^{1/2}+3x^{-1/2}=10x^{-3/2}$.

Solución

1. Recordemos que para factorizar expresiones algebraicas con exponentes racionales, tomamos como factor común literal, si lo hay, la potencia de la variable con el menor exponente. En este caso $x^{1/2}$ es el factor común.

$$x^{1/2} - x^{3/2} = 0$$

$$x^{1/2}(1 - x) = 0$$

$$x^{1/2} = 0 \ \text{ ó } \ 1 - x = 0$$

$$x = 0 \ \text{ ó } \ x = 1.$$

Es fácil ver que ambos valores satisfacen la ecuación. Luego, $x = 0$ y $x = 1$ son las soluciones de la ecuación.

2. $$y^{3/2} = 4y$$

$$y^{3/2} - 4y = 0$$

$$y\left(y^{1/2} - 4\right) = 0$$

$$y = 0 \ \text{ ó } \ y^{1/2} = 4$$

$$y = 0 \ \text{ ó } \ y = 4^2$$

$$y = 0 \ \text{ ó } \ y = 16.$$

Observamos que ambos valores satisfacen la ecuación original. Luego, $y = 0$ y $y = 16$ son las soluciones de la ecuación dada.

3. $$x^{1/2} + 3x^{-1/2} = 10x^{-3/2}$$

$$x^{1/2} + 3x^{-1/2} - 10x^{-3/2} = 0$$

$$x^{-3/2}\left(x^2 + 3x - 10\right) = 0$$

$$x^{-3/2}(x + 5)(x - 2) = 0.$$

Un producto de tres expresiones es cero si al menos una de ellas es cero. Luego, $x^{-3/2}(x + 5)(x - 2) = 0$ si $x^{-3/2} = 0$ ó $x + 5 = 0$ ó $x - 2 = 0$.

La ecuación $x^{-3/2} = 0$ es equivalente a $\dfrac{1}{x^{3/2}} = 0$. Un cociente es cero si el numerador es cero y el denominador distinto de cero. Luego, $\dfrac{1}{x^{3/2}} \neq 0$ para todo $x \neq 0$.

$x + 5 = 0$ si $x = -5$ y $x - 2 = 0$ si $x = 2$.

Al verificar vemos que $(-5)^{1/2}$ no es un número real. Por tanto, $x = -5$ no es solución de la ecuación original.

Como $x = 2$ si satisface la ecuación original, es la única solución de la ecuación dada.

Ejercicios propuestos

En cada numeral, resolver la ecuación dada, completando el cuadrado.

1. $x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = 0$.
2. $x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$.
3. $x + 4x^{1/2} + 3 = 0$.
4. $x^{1/2} - 3x^{1/3} = 3x^{1/6} - 9$.
5. $x(2+x)^{-2/3} + (2+x)^{1/3} = 0$.

Respuestas

1. -27 y 8.
2. 1.
3. No tiene solución en los reales.
4. 729 y 27.
5. -1.

Lección 81

Sistemas de dos ecuaciones no lineales I

Aprenderemos a resolver sistemas de dos ecuaciones no lineales en dos variables, que son aquellos que incluyen por lo menos una ecuación no lineal. Veremos la solución algebraica y representaremos gráficamente las ecuaciones y las soluciones del sistema.

En esta lección trabajaremos sistemas no lineales donde una de las ecuaciones es lineal y la otra cuadrática y para resolverlos, procederemos de la siguiente manera:

1. En la ecuación lineal despejamos una variable en términos de la otra.
2. Sustituimos la expresión hallada en 1. en la ecuación cuadrática, obteniendo así una ecuación de segundo grado en una variable.
3. Resolvemos la ecuación hallada en 2.
4. Sustituimos cada valor obtenido en el paso anterior en la expresión encontrada en 1., para hallar el correspondiente valor de la otra variable.

Gráficamente, las soluciones del sistema son las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones.

Ejemplo 81.1

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 7 & (1) \\ x^2 + y^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

Solución

Despejando y de (1) tenemos

$$y = 7 - x \qquad (3)$$

y reemplazando esta expresión para y en (2) obtenemos $x^2 + (7 - x)^2 = 25$.

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} x^2 + 49 - 14x + x^2 &= 25 \\ 2x^2 - 14x + 24 &= 0 \\ 2(x^2 - 7x + 12) &= 0 \\ x^2 - 7x + 12 &= 0 \\ (x - 3)(x - 4) &= 0 \end{aligned}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 4 = 0$$
$$x = 3 \quad \text{ó} \quad x = 4$$

Los valores de x hallados, los reemplazamos en la ecuación (3) y encontramos los correspondientes valores de y, así: Para $x = 3$, $y = 7 - 3 = 4$ y para $x = 4$, $y = 7 - 4 = 3$.

Luego, las soluciones del sistema son: $x = 3$, $y = 4$ y $x = 4$, $y = 3$.

Otra manera de presentar las soluciones es en forma de pares ordenados, así: $(3, 4)$, $(4, 3)$.

Gráficamente, los puntos $(3, 4)$ y $(4, 3)$ son los puntos de intersección de la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = 25$, que trazamos en una lección anterior, y la recta $x + y = 7$, como se muestra en la figura 81.1.

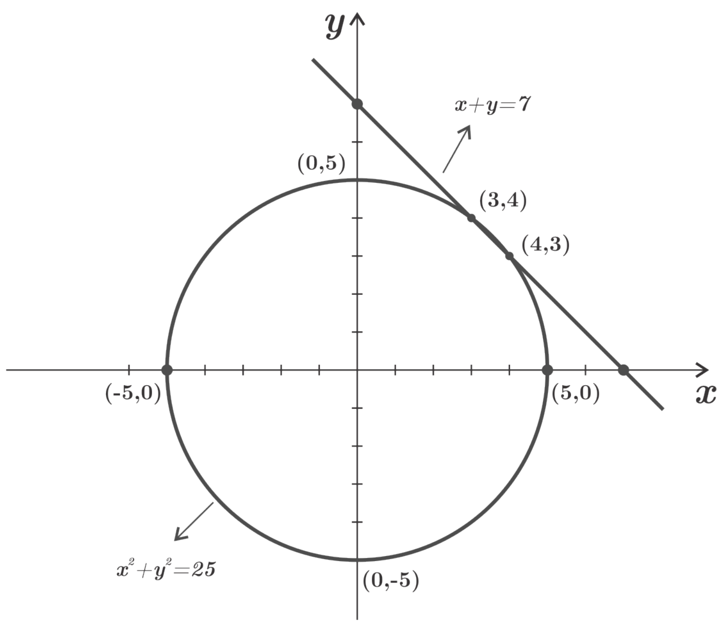

Figura 81.1

Ejemplo 81.2

Resolver cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 25 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + 2y = 9 \\ y = x - 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x \end{cases}$

Solución

1. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 25 & (1) \\ x - 2y = -1 & (2) \end{cases}$

Despejando x de la ecuación (2) tenemos

$$x = 2y - 1 \qquad (3)$$

y reemplazando esta expresión para x en la ecuación (1), obtenemos

$$(2y-1)^2 + 4y^2 = 25.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned}
4y^2 - 4y + 1 + 4y^2 &= 25\\
8y^2 - 4y - 24 &= 0\\
4(2y^2 - y - 6) &= 0\\
2y^2 - y - 6 &= 0\\
(2y+3)(y-2) &= 0\\
2y + 3 = 0 \quad &\text{ó} \quad y - 2 = 0\\
y = -\frac{3}{2} \quad &\text{ó} \quad y = 2
\end{aligned}$$

Reemplazamos y por $-\dfrac{3}{2}$ y y por 2 en la ecuación (3) y obtenemos los correspondientes valores de x:

Si $y = -\dfrac{3}{2}$ entonces $x = 2\left(-\dfrac{3}{2}\right) - 1 = -4$. Si $y = 2$ entonces $x = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Luego, las soluciones del sistema son: $x = -4$, $y = -\dfrac{3}{2}$ y $x = 3$, $y = 2$.

La gráfica de la primera ecuación es una elipse y la gráfica de la segunda ecuación es una recta que corta la elipse en los puntos $\left(-4, -\dfrac{3}{2}\right)$ y $(3, 2)$, como se muestra en la figura 81.2.

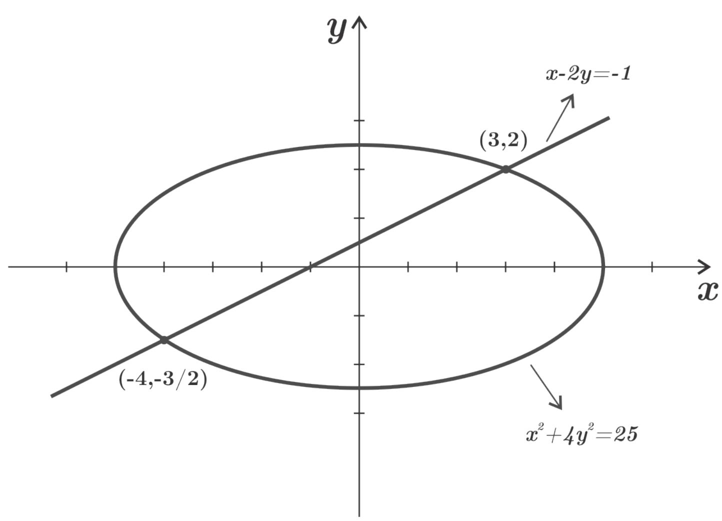

Figura 81.2

2. $\begin{cases} x^2 + 2y = 9 & (1) \\ y = x - 3 & (2) \end{cases}$

Reemplazamos la expresión para y de la ecuación (2) en la ecuación (1) y obtenemos

$$x^2 + 2(x-3) = 9.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 6 &= 9 \\ x^2 + 2x - 15 &= 0 \\ (x+5)(x-3) &= 0 \\ x = -5 \quad \text{ó} \quad x &= 3. \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores de x en la ecuación (2) obtenemos los correspondientes valores de y:

Si $x = -5$, $y = -5 - 3 = -8$ y si $x = 3$, $y = 3 - 3 = 0$.

Luego, las soluciones del sistema son $x = -5$, $y = -8$ y $x = 3$, $y = 0$.

Como vemos en la figura 81.3, la gráfica de la ecuación $x^2 + 2y = 9$ es una parábola que se abre hacia abajo, cuyo punto más alto, llamado vértice, es $\left(0, \dfrac{9}{2}\right)$ y sus interceptos con el eje x son los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ y la ecuación $y = x - 3$ representa una recta que corta a la parábola en los puntos $(3, 0)$ y $(-5, -8)$.

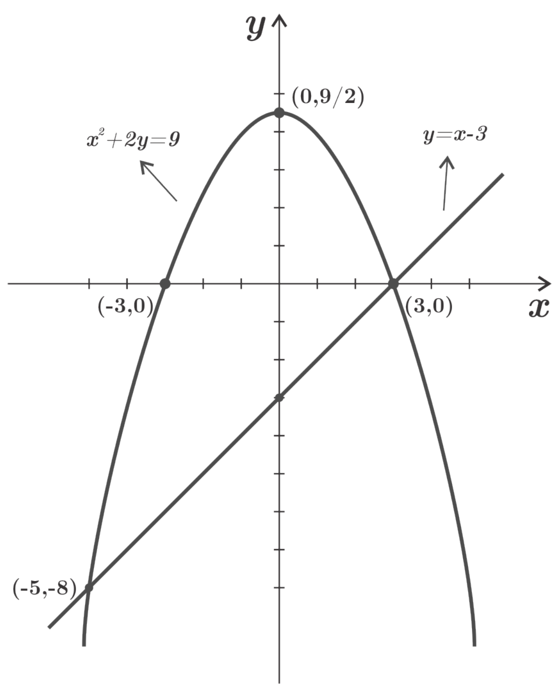

Figura 81.3

3. $\begin{cases} y^2 = 2x & (1) \\ y = x & (2) \end{cases}$

En la ecuación (1) reemplazamos la expresión para y dada en la ecuación (2) y obtenemos $x^2 = 2x$ o sea $x^2 - 2x = 0$. Resolviendo esta ecuación por factorización obtenemos $x = 0$ y $x = 2$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (2) obtenemos $y = 0$ y $y = 2$.

Luego, las soluciones del sistema son $x = 0$, $y = 0$ y $x = 2$, $y = 2$.

Observamos en la figura 81.4 que la gráfica de la primera ecuación es una parábola y la gráfica de la segunda ecuación es una recta que pasa por el origen y corta la parábola en los puntos $(0, 0)$ y $(2, 2)$.

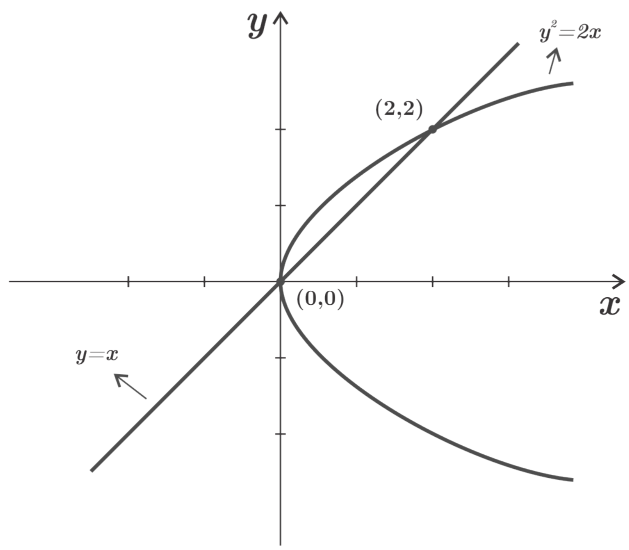

Figura 81.4

Ejercicios propuestos

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones y, en cada caso, representar gráficamente las ecuaciones y señalar los puntos correspondientes a las soluciones:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ x = y \end{cases}$

Respuestas

1. $x = 2,\ y = 1$ y $x = -1,\ y = -2$.

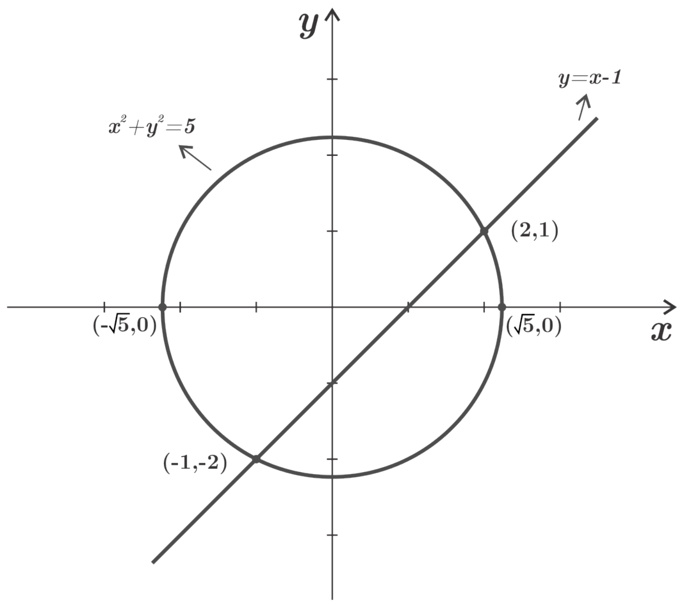

Figura 81.5

2. $x = 1,\ y = 1$ y $x = 4,\ y = 4$.

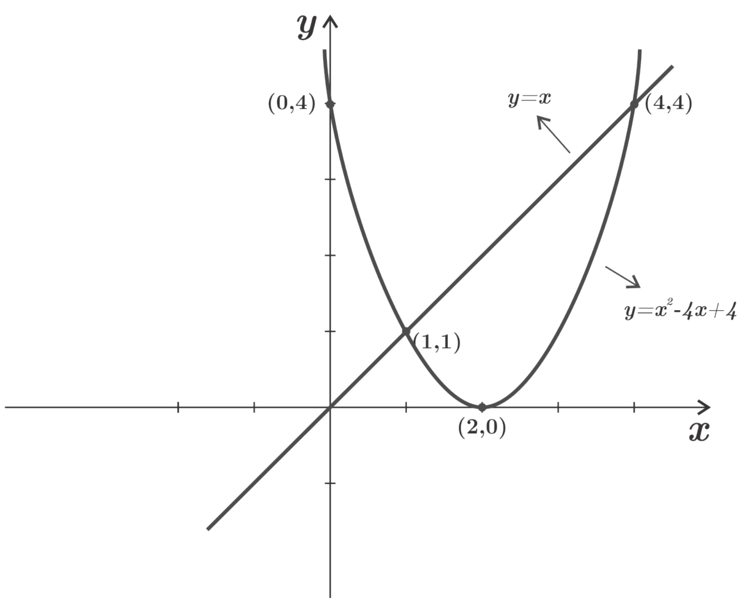

Figura 81.6

Lección 82

Sistemas de dos ecuaciones no lineales II

En esta lección aprenderemos a resolver sistemas de dos ecuaciones no lineales en dos variables cuando las dos son cuadráticas. De acuerdo con el tipo de ecuaciones, los sistemas se resuelven usando los métodos aprendidos en los sistemas de ecuaciones lineales, como veremos en los ejemplos que ilustran esta lección.

Caso I

Las dos ecuaciones del sistema son de la forma $ax^2 + by^2 = c$ con a y b diferentes de 0.

En este caso, se puede aplicar el método de eliminación por adición o sustracción.

Ejemplo 82.1

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 7 & (1) \\ 2x^2 - y^2 = 7 & (2) \end{cases}$$

Solución

Eliminemos la variable y y para ello multiplicamos ambos miembros de la ecuación (2) por 3 y obtenemos

$$6x^2 - 3y^2 = 21 \qquad (3)$$

Sumamos, miembro a miembro, la ecuación (1) con la ecuación (3) y obtenemos

$$7x^2 = 28.$$

Luego, $x^2 = 4$ y por tanto $x = \pm 2$.

Reemplazando cada valor de x, en una de las ecuaciones iniciales, obtenemos los correspondientes valores de y.

Sustituyendo x por 2 en la ecuación (2) tenemos $2(2)^2 - y^2 = 7$ y resolviendo esta ecuación encontramos $y = \pm 1$.

Por tanto $x = 2$, $y = 1$ y $x = 2$, $y = -1$ son soluciones del sistema.

Sustituyendo x por -2 en (2) tenemos $y = \pm 1$. Luego, $x = -2$, $y = 1$ y $x = -2$, $y = -1$ son soluciones del sistema.

Por tanto, el sistema de ecuaciones dado tiene cuatro soluciones: $x = 2$, $y = 1$; $x = 2$, $y = -1$; $x = -2$, $y = 1$; $x = -2$, $y = -1$.

Ejemplo 82.2

Resolver cada uno de los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 6 \\ 3x^2 + 2y^2 = 35 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x^2 + 3y^2 = 4 \\ 8x^2 + 5y^2 = 7 \end{cases}$

Solución

1. $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 6 & (1) \\ 3x^2 + 2y^2 = 35 & (2) \end{cases}$

   Eliminemos la variable y y para ello:

   Multiplicamos ambos miembros de la ecuación (1) por 2 y tenemos

   $$4x^2 - 6y^2 = 12 \qquad (3)$$

   Multiplicamos ambos miembros de la ecuación (2) por 3 y obtenemos

   $$9x^2 + 6y^2 = 105 \qquad (4)$$

   Sumamos miembro a miembro las ecuaciones (3) y (4) y tenemos $13x^2 = 117$. Dividiendo entre 13 ambos miembros de esta ecuación obtenemos $x^2 = 9$ cuyas soluciones son $x = \pm 3$.

   Con estos valores de x, encontramos los correspondientes valores de y, reemplazándolos en una de las ecuaciones iniciales.

   Reemplazando x por 3 en la ecuación (2) obtenemos $3(3)^2 + 2y^2 = 35$. Resolviendo esta ecuación encontramos $y = \pm 2$.

   Por tanto, las soluciones son : $x = 3$, $y = 2$ y $x = 3$, $y = -2$.

   Vemos que al sustituir x por -3 en la ecuación (2) obtenemos el mismo resultado anterior, o sea $y = \pm 2$.

   Por tanto, las soluciones son $x = -3$, $y = 2$ y $x = -3$, $y = -2$.

   Luego, las soluciones al sistema son $x = 3$, $y = 2$; $x = 3$, $y = -2$; $x = -3$, $y = 2$; $x = -3$, $y = -2$.

2. $\begin{cases} 4x^2 + 3y^2 = 4 & (1) \\ 8x^2 + 5y^2 = 7 & (2) \end{cases}$

Eliminamos x y para ello multiplicamos ambos miembros de la ecuación (1) por 2 y tenemos

$$8x^2 + 6y^2 = 8 \qquad (3)$$

Restamos miembro a miembro la ecuación (2) de la ecuación (3) y obtenemos $y^2 = 1$ cuyas soluciones son $y = \pm 1$.

Reemplazando estos valores de y en la ecuación (1) tenemos: Para $y = 1$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$ y para $y = -1$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Luego, las soluciones son: $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$; $x = \frac{1}{2}$, $y = -1$; $x = -\frac{1}{2}$, $y = 1$; $x = -\frac{1}{2}$, $y = -1$.

Caso II

Las dos ecuaciones del sistema son de la forma $ax^2 + cy^2 + dx = f$.

Usando el método de eliminación por adición y sustracción eliminamos el término en y^2 obteniendo así una ecuación cuadrática en x. Los valores de x obtenidos al resolver esta ecuación se sustituyen en una de las ecuaciones originales para obtener los correspondientes valores de y.

Ejemplo 82.3

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 9 & (1) \\ x^2 + 4y^2 + 3x = 14 & (2) \end{cases}$$

Solución

Eliminamos el término y^2 y para ello multiplicamos ambos miembros de la ecuación (1) por 4 y tenemos

$$4x^2 + 4y^2 + 8x = 36. \qquad (3)$$

Restamos miembro a miembro la ecuación (2) de la ecuación (3) y obtenemos

$$3x^2 + 5x = 22.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 22 &= 0 \\ (3x + 11)(x - 2) &= 0 \\ x &= -\frac{11}{3} \text{ ó } x = 2. \end{aligned}$$

Reemplazando cada valor de x en una de las ecuaciones iniciales obtenemos los correspondientes valores de y.

Sustituyendo x por $-\dfrac{11}{3}$ en la ecuación (1) obtenemos $\left(-\dfrac{11}{3}\right)^2 + y^2 + 2\left(-\dfrac{11}{3}\right) = 9$ y resolviendo esta ecuación encontramos $y = \pm\dfrac{\sqrt{26}}{3}$.

Por tanto, las soluciones son: $x = -\dfrac{11}{3}$, $y = \dfrac{\sqrt{26}}{3}$ y $x = -\dfrac{11}{3}$, $y = -\dfrac{\sqrt{26}}{3}$.

Reemplazando x por 2 en la ecuación (1) tenemos $(2)^2 + y^2 + 2(2) = 9$ y resolviendo esta ecuación obtenemos $y = \pm 1$.

Luego, las soluciones son: $x = 2$, $y = 1$ y $x = 2$ $y = -1$.

Por tanto, las soluciones al sistema son: $x = -\dfrac{11}{3}$, $y = \dfrac{\sqrt{26}}{3}$; $x = -\dfrac{11}{3}$, $y = -\dfrac{\sqrt{26}}{3}$; $x = 2$, $y = 1$; $x = 2$, $y = -1$.

Si las dos ecuaciones son de la forma $ax^2 + cy^2 + ey = f$ procedemos como en el ejemplo anterior, pero eliminando el término en x^2 para obtener una ecuación cuadrática en y.

Ejemplo 82.4

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 - 17y = 21 & (1) \\ 4x^2 - y^2 - 2y = 1 & (2) \end{cases}$$

Solución

Eliminamos el término en x^2 y para ello:

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación (1) por 4 y obtenemos

$$36x^2 + 16y^2 - 68y = 84 \qquad (3)$$

Multiplicamos la ecuación (2) por 9 y tenemos

$$36x^2 - 9y^2 - 18y = 9 \qquad (4)$$

Restamos miembro a miembro la ecuación (4) de la ecuación (3) y obtenemos

$$25y^2 - 50y = 75.$$

Dividiendo entre 25 ambos miembros de esta ecuación tenemos

$$y^2 - 2y = 3.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} y^2 - 2y - 3 &= 0 \\ (y-3)(y+1) &= 0 \\ y = 3 \ \text{ ó } \ y &= -1. \end{aligned}$$

Sustituyendo cada uno de estos valores en una de las ecuaciones originales obtenemos los correspondientes valores de x.

Si reemplazamos y por 3 en la ecuación (2) obtenemos $4x^2 - 3^2 - 2(3) = 1$ y resolviendo esta ecuación obtenemos $x = \pm 2$.

Luego, las soluciones son $x = 2$, $y = 3$ y $x = -2$, $y = 3$.

Al sustituir y por -1 en la ecuación (2) tenemos $4x^2 - (-1)^2 - 2(-1) = 1$ y resolviendo esta ecuación obtenemos $x = 0$.

Luego, las soluciones son $x = 0$, $y = -1$.

Por tanto, las soluciones del sistema son $x = 2$, $y = 3$; $x = -2$, $y = 3$; $x = 0$, $y = -1$.

Ejercicios propuestos

En cada numeral, resolver los sistemas dados.

1. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ 3x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 36 \\ 2x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = -2 \\ 9x^2 + y^2 + 18x = 136. \end{cases}$

Respuestas

1. $x = 1$, $y = 1$; $x = 1$, $y = -1$; $x = -1$, $y = 1$; $x = -1$, $y = -1$.
2. $x = \frac{2}{3}\sqrt{17}$, $y = \frac{8}{3}$; $x = \frac{2}{3}\sqrt{17}$, $y = -\frac{8}{3}$; $x = -\frac{2}{3}\sqrt{17}$, $y = \frac{8}{3}$; $x = -\frac{2}{3}\sqrt{17}$, $y = \frac{8}{3}$.
3. $x = 3$, $y = 1$; $x = 3$, $y = -1$; $x = -\frac{23}{4}$, $y = \frac{\sqrt{929}}{4}i$; $x = -\frac{23}{4}$, $y = -\frac{\sqrt{929}}{4}i$.

Lección 83

Números complejos

Cuando trabajamos ecuaciones cuadráticas encontramos que algunas de ellas no tienen solución en los números reales. Vimos que, en general, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ no tiene solución en los reales si su discriminante $b^2 - 4ac$ es un número negativo.

En esta lección vamos a introducir un nuevo conjunto numérico, llamado conjunto de los números complejos, en el cual toda ecuación cuadrática tiene solución. Definiremos la unidad imaginaria y las operaciones de suma y resta en los complejos y mostraremos algunos ejemplos, además de proponer algunos ejercicios de práctica para el lector.

Consideremos la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Si tratamos de resolverla, encontramos que $x^2 = -1$ y, como cualquier número real elevado al cuadrado es siempre un número positivo o cero, esta ecuación no tiene solución en los números reales. Esta ecuación, y en general toda ecuación cuadrática, tiene solución en el conjunto de los números complejos en el cual se define un número que se denota por $\boldsymbol{i}$, tal que

$$\boldsymbol{i^2 = -1}.$$

$\boldsymbol{i}$ se denomina **unidad imaginaria**.

Las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$, en el conjunto de los números complejos, son entonces $x = \pm\sqrt{-1} = \pm\sqrt{i^2} = \pm i$, es decir, $x = i$ y $x = -i$.

Los números complejos

El conjunto de los números complejos, que denotamos por $\mathbb{C}$, es el conjunto de todos los números de la forma $a + bi$, con a y b números reales e $i^2 = -1$.

$$\mathbb{C} = \left\{a + bi/\ a \text{ y } b \text{ son números reales e } i^2 = -1\right\}.$$

Ejemplo 83.1

- $3 + 2i$, $-5 + \dfrac{1}{2}i$, $2 - i$ y $7 + \sqrt{3}i$ son números complejos.
- 3 es un número complejo, puesto que $3 = 3 + 0i$.
- $-\dfrac{1}{2}$ es un número complejo, ya que $-\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} + 0i$.
- $8i$ es un número complejo, ya que $8i = 0 + 8i$.

En general, todo número real a es un número complejo, ya que $a = a + 0i$. Luego, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, y así

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \text{ con } \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Si $z = a + bi$ es un número complejo, decimos que a es la **parte real** de z y escribimos $a = \boldsymbol{Re}\,(z)$ y b es la **parte imaginaria** de z, que denotamos $b = \boldsymbol{Im}\,(z)$.

Si $a = 0$ y $b \neq 0$, decimos que $z = bi$ es un **número imaginario puro**.

Si $a \neq 0$ y $b = 0$, z es un número real.

Ejemplo 83.2

1. La parte real de $2 - 3i$ es 2 y su parte imaginaria es -3. Es decir, $Re\,(2 - 3i) = 2$ e $Im\,(2 - 3i) = -3$.
2. $Re\,(7 - 5i) = 7$ e $Im\,(7 - 5i) = -5$.
3. La parte imaginaria de $-2 + \sqrt{2}i$ es $\sqrt{2}$.
4. $2i$, $-\sqrt{3}i$, πi son imaginarios puros.

Igualdad de números complejos

Si $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ son números complejos,

$$z_1 = z_2 \text{ si y sólo si } a_1 = a_2 \text{ y } b_1 = b_2.$$

Es decir, dos números complejos son iguales, si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales.

Ejemplo 83.3

1. $2 + 3i = a + 3i$ cuando $a = 2$.
2. $a + bi = -1$ cuando $a = -1$ y $b = 0$.
3. $3 + 7i \neq 2 + 7i$, ya que $3 \neq 2$.
4. $5 + 2i \neq 5 - 3i$, porque $2 \neq -3$.

Operaciones con números complejos

Suma de números complejos

Si $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ son números complejos, definimos $z_1 + z_2$ así:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i.$$

Es decir, la suma de dos números complejos es una número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales de cada uno de los números y su parte imaginaria la suma de sus partes imaginarias.

Para sumar más de dos números complejos procedemos de la misma forma.

La suma de números complejos cumple las mismas propiedades de la suma de números reales.

El cero de los números complejos es $0 = 0 + 0i$.

Ejemplo 83.4

Realizar las siguientes operaciones:

1. $(4 - 3i) + (2 - 7i)$.
2. $(3\pi - i) + (3\pi - 2i)$.
3. $2 + (3 - 5i) + \dfrac{1}{2}i$.

Solución

1. $(4 - 3i) + (2 - 7i) = (4 + 2) + (-3 - 7)\, i = 6 + (-10)\, i = 6 - 10i$.
2. $(3\pi - i) + (3\pi - 2i) = (3\pi + 3\pi) + (-1 + (-2))\, i = 6\pi + (-1 - 2)\, i = 6\pi - 3i$.
3. $$\begin{aligned} 2 + (3 - 5i) + \frac{1}{2}i &= (2 + 0i) + (3 - 5i) + \left(0 + \frac{1}{2}\right) i \\ &= (2 + 3 + 0) + \left(0 + (-5) + \frac{1}{2}\right) i \\ &= 5 + \frac{-10 + 1}{2} i \\ &= 5 - \frac{9}{2} i. \end{aligned}$$

Resta de números complejos

Si $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ son números complejos, definimos $z_1 - z_2$ así:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 + (-a_2)) + (b_1 + (-b_2))\, i = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i.$$

Es decir, la resta dos números complejos es un número complejo cuya parte real es la diferencia de las partes reales de cada uno de los números y su parte imaginaria la diferencia de sus partes imaginarias, teniendo en cuenta cual es el minuendo y cual el sustraendo.

Ejemplo 83.5

En cada numeral, realizar las operaciones indicadas.

1. $(3 + 2i) - \left(9\sqrt{2} + 4i\right)$.
2. $\left(3\sqrt{2} + \sqrt{3}i\right) - \left(-\sqrt{2} + 2i\right)$.
3. $\left(\dfrac{1}{2} + 2i\right) - \left(\dfrac{3}{2} + 4i\right) + \left(\dfrac{5}{2} - i\right)$.
4. $-7 - (2 - 3i) + \dfrac{2}{3}i$.

Solución

1. $(3+2i)-\left(9\sqrt{2}+4i\right)=\left(3-9\sqrt{2}\right)+(2-4)\,i=\left(3-9\sqrt{2}\right)-2i.$
2. $\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}i\right)-\left(-\sqrt{2}+2i\right)=\left(3\sqrt{2}-\left(-\sqrt{2}\right)\right)+\left(\sqrt{3}-2\right)i=4\sqrt{2}+\left(\sqrt{3}-2\right)i.$
3. $\left(\dfrac{1}{2}+2i\right)-\left(\dfrac{3}{2}+4i\right)+\left(\dfrac{5}{2}-i\right)=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}\right)+(2-4-1)\,i=\dfrac{3}{2}-3i.$
4. $-7-(2-3i)+\dfrac{2}{3}i=-7-2+\left(3+\dfrac{2}{3}\right)i=-9+\dfrac{9+2}{3}i=-9+\dfrac{11}{3}i.$

Observamos que para la suma y la resta de números complejos podemos proceder como en la reducción de términos semejantes en polinomios en los reales.

Ejercicios propuestos

En cada numeral, realizar las operaciones indicadas y hallar la parte real y la parte imaginaria del número complejo resultante.

1. $(4-6i)+(5+7i)$.
2. $(9-3i)+3\pi$.
3. $(7+6i)-(6-3i)$.
4. $(5+3i)-(2+4i)+\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{3}i\right)$.
5. $(3-2i)-(4-3i)+(2-5i)$.
6. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$.

Respuestas

1. $9+i$, 9, 1.
2. $3\,(3+\pi)-3i$, $3\,(3+\pi)$, -3.
3. $1+9i$, 1, 9.
4. $\dfrac{9}{2}-\dfrac{8}{3}i$, $\dfrac{9}{2}$, $-\dfrac{8}{3}$.
5. $1-4i$, 1, -4.
6. $\sqrt{2}i$, 0, $\sqrt{2}$.

Lección 84

Multiplicación y división de números complejos

En esta lección veremos la multiplicación y la división de números complejos y el concepto de conjugado de un número complejo. Presentaremos algunos ejemplos resueltos y dejaremos otros al lector para que afiance los conceptos aprendidos.

Multiplicación de números complejos

Si $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ son números complejos, definimos el producto de z_1 y z_2, que denotamos $z_1 \cdot z_2$, así:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i.$$

Ejemplo 84.1

En cada numeral, realizar las operaciones indicadas.

1. $(2+3i)\,(4+5i)$.
2. $\left(1+\frac{4}{7}i\right)\left(-\frac{2}{3}+9i\right)$.
3. $3i\left(8-\frac{1}{3}i\right)$.

Solución

1. $(2+3i)\,(4+5i) = (2\cdot 4 - 3\cdot 5) + (2\cdot 5 + 4\cdot 3)\, i = (8-15) + (10+12)\, i = -7+22i$.
2. $$\begin{aligned}\left(1+\frac{4}{7}i\right)\left(-\frac{2}{3}+9i\right) &= \left(1\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{4}{7}(9)\right) + \left(1\cdot 9 + \frac{4}{7}\left(-\frac{2}{3}\right)\right) i \\ &= \left(-\frac{2}{3} - \frac{36}{7}\right) + \left(9 - \frac{8}{21}\right) i \\ &= -\frac{122}{21} + \frac{181}{21} i.\end{aligned}$$
3. $3i\left(8-\frac{1}{3}i\right) = (0+3i)\left(8-\frac{1}{3}i\right) = \left(0\cdot 8 - 3\left(-\frac{1}{3}\right)\right) + \left(0\left(-\frac{1}{3}\right) + 3\cdot 8\right) i = 1+24i$.

En la práctica el producto de números complejos se puede realizar aplicando las mismas propiedades del producto de números reales o de polinomios, en particular las leyes asociativa, conmutativa y distributiva del producto con respecto a la suma, teniendo en cuenta que $i^2 = -1$. Por lo tanto, no es necesario memorizar la fórmula para el producto.

En efecto, para hallar $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$, si desarrollamos el producto indicado en el lado derecho de la igualdad usando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, efectuamos las operaciones teniendo en cuenta que $i^2 = -1$ y reducimos términos semejantes tenemos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 (a_2 + b_2 i) + b_1 i (a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i + b_1 b_2 (-1) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i, \end{aligned}$$

lo cual coincide con la definición del producto de z_1 y z_2.

Ejemplo 84.2

Realizar las operaciones indicadas en cada numeral.

1. $(-1 + i)(2 - i)$.
2. $\left(\dfrac{2}{3} - 2i\right)\left(3 + \dfrac{1}{2} i\right)$.
3. $2i(4 + 5i)$.
4. $4\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{4} i\right)$.

Solución

1. $(-1 + i)(2 - i) = -1 \cdot 2 + (-1 \cdot -1 + 1 \cdot 2) i - i^2 = -2 + 3i - (-1) = -2 + 3i + 1 = -1 + 3i$.
2. $$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3} - 2i\right)\left(3 + \frac{1}{2} i\right) &= \frac{2}{3}(3) + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 3\right) i - 2\left(\frac{1}{2}\right) i^2 \\ &= 2 + \left(\frac{1}{3} - 6\right) i - i^2 \\ &= 2 - \frac{17}{3} i + 1 \\ &= 3 - \frac{17}{3} i. \end{aligned}$$
3. $2i(4 + 5i) = 2i \cdot 4 + 2i \cdot 5i = 8i + 10i^2 = 8i + 10(-1) = 8i - 10 = -10 + 8i$.
4. $4\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{4} i\right) = \dfrac{8}{3} - 5i$.

Conjugado de un número complejo

Si $z = a + bi$ es un número complejo, llamaremos **conjugado** de z y lo denotaremos por $\bar{z}$, al número complejo $a - bi$. Es decir,

$$\bar{z} = a - bi.$$

Por ejemplo, si $z = 3 + 4i$ el conjugado de z es $\bar{z} = 3 - 4i$ y

$z \cdot \bar{z} = (3 + 4i)\,(3 - 4i) = 3^2 - (4i)^2 = 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 9 + 16 = 25.$

El conjugado de $z = 2 - 3i = z + (-3)i$ es $\bar{z} = 2 - (-3)i = 2 + 3i$ y

$z \cdot \bar{z} = (2 - 3i)\,(2 + 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 - 9i^2 = 4 - 9(-1) = 4 + 9 = 13.$

En general, si multiplicamos un número complejo por su conjugado, el resultado es un número real.

En efecto, si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2.$$

Luego,

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2.$$

División de números complejos

Si $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ son números complejos, con $z_2 \neq 0$, para dividir z_1 entre z_2, expresamos el cociente como una fracción y y multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador. Es decir,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a^2 + b^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\,i}{a^2 + b^2}.$$

Por ejemplo, si $z_1 = 2 - 3i$ y $z_2 = 5 + 2i$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2 - 3i}{5 + 2i} \\
&= \frac{2 - 3i}{5 + 2i} \cdot \frac{5 - 2i}{5 - 2i} \\
&= \frac{(2 - 3i)(5 - 2i)}{(5 + 2i)(5 - 2i)} \\
&= \frac{10 - 19i + 6i^2}{25 + 4} \\
&= \frac{10 - 19i - 6}{29} \\
&= \frac{4 - 19i}{29} \\
&= \frac{4}{29} - \frac{19}{29} i.
\end{aligned}$$

Ejemplo 84.3

Dividir:

1. $1 + i$ entre $1 - i$.

2. $5-3i$ entre $3+4i$.

3. $8-5i$ entre $7+6i$.

Solución

1. $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{1+i}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i}=\dfrac{(1+i)^2}{1+1}=\dfrac{1+2i+i^2}{2}=\dfrac{2i}{2}=i.$

2. $$\begin{aligned}\frac{5-3i}{3+4i}&=\frac{5-3i}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}\\&=\frac{(5-3i)(3-4i)}{9+16}\\&=\frac{15-29i+12i^2}{25}\\&=\frac{15-29i-12}{25}\\&=\frac{3-29i}{25}\\&=\frac{3}{25}-\frac{29}{25}i.\end{aligned}$$

3. $\dfrac{8-5i}{7+6i}=\dfrac{8-5i}{7+6i}\cdot\dfrac{7-6i}{7-6i}=\dfrac{(8-5i)(7-6i)}{49+36}=\dfrac{56-83i+30i^2}{85}=\dfrac{26-83i}{85}=\dfrac{26}{85}-\dfrac{83}{85}i.$

Ejercicios propuestos

En cada numeral, realizar las operaciones indicadas, simplificar y expresar el resultado en la forma $a+bi$.

1. $5i(2-4i)$.
2. $-\dfrac{7}{5}(10+2i)$.
3. $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.
4. $\dfrac{2-3i}{-1+2i}$.
5. $\dfrac{3+3i}{2-4i}$.
6. $\dfrac{1-3i}{-2-2i}$.

Respuestas

1. $20+10i$.
2. $-14-\dfrac{14}{5}i$.

3. 1.

4. $-\dfrac{8}{5} - \dfrac{1}{5}i.$

5. $-\dfrac{3}{10} + \dfrac{9}{10}i.$

6. $\dfrac{1}{2} + i.$

Lección 85

Raíces complejas de una ecuación cuadrática

En esta lección vamos a hallar, en el conjunto de los números complejos, las raíces de ecuaciones cuadráticas o de forma cuadrática en una variable cuando no todas son reales. Resolveremos algunas de estas ecuaciones, hallando sus soluciones reales y complejas. Dejaremos al lector la solución de algunas ecuaciones.

En los números complejos sabemos que $i^2 = -1$. Como, por ejemplo, $\sqrt{-2} = \sqrt{2(-1)} = \sqrt{2i^2}$, entonces $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$. En forma similar, $\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$, $\sqrt{-4} = \sqrt{4}i = 2i$, $\sqrt{-20} = \sqrt{20}i = 2\sqrt{5}i$.

En general, en el conjunto de los números complejos, si a es un número positivo,

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a(-1)} = \sqrt{ai^2} = \sqrt{a}i.$$

Con base en lo anterior podemos afirmar que una ecuación cuadrática en una variable cuyo discriminante D es un número negativo tiene solución en los números complejos.

Ejemplo 85.1

Resolver la ecuación cuadrática $y^2 - 2y + 6 = 0$.

Solución

En esta ecuación $a = 1$, $b = -2$ y $c = 6$ y así, el discriminante $D = (-2)^2 - 4(1)(6) = 4 - 24 = -20$ es un número negativo. Luego, esta ecuación no tiene solución en los reales. Vamos a hallar las raíces complejas, utilizando la fórmula cuadrática:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{-20}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{20}i}{2} \\ &= \frac{2 \pm\ 2\sqrt{5}i}{2} \\ &= \frac{2\left(1 \pm \sqrt{5}i\right)}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{5}i. \end{aligned}$$

Luego, las raíces de la ecuación son $y_1 = 1 + \sqrt{5}i$ y $y_2 = 1 - \sqrt{5}i$.

Observamos que estas raíces son conjugadas, es decir, $\bar{y_1} = y_2$ y $\bar{y_2} = y_1$.

Ejemplo 85.2

Hallar las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + 3x + 3 = 0$.
2. $x^4 - 16 = 0$.
3. $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$.
4. $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$.

Solución

1. En la ecuación $a = 1$, $b = 3$ y $c = 3$ y entonces el discriminante $D = 3^2 - 4(1)(3) = 9 - 12 = -3$ es un número negativo. Luego, la ecuación no tiene soluciones reales. Apliquemos la fórmula cuadrática para hallar sus raíces complejas:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

   Luego, las raíces de la ecuación son $x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

   Observamos que estas raíces son conjugadas, es decir, $\bar{x_1} = x_2$ y $\bar{x_2} = x_1$.

2. La ecuación $x^4 - 16 = 0$ es de forma cuadrática porque si hacemos $u = x^2$, la ecuación se convierte en $u^2 - 16 = 0$ que es una ecuación cuadrática en u.

   Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} u^2 &= 16 \\ u &= \pm\sqrt{16} \\ u &= \pm 4. \end{aligned}$$

   Luego, las raíces de esta ecuación son $u = 4$ y $u = -4$.

   Reemplacemos u por x^2 para hallar las soluciones de la ecuación original:

   Si $u = 4$, entonces $x^2 = 4$ y así, $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

   Si $u = -4$, entonces $x^2 = -4$ y así, $x = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}i = \pm 2i$.

   Luego, las raíces de la ecuación $x^4 - 16 = 0$ son $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2i$ y $x_4 = -2i$.

   Observamos que las dos últimas raíces son complejas conjugadas, es decir, $\bar{x_3} = x_4$ y $\bar{x_4} = x_3$.

3. La ecuación $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$ es de forma cuadrática, porque si hacemos $u = x^2$, la ecuación se convierte en $u^2 + 13u + 36 = 0$ que es una ecuación cuadrática en u.

Resolvamos esta última ecuación:

$$\begin{aligned}u^2+13u+36&=0\\(u+9)(u+4)&=0\\u&=-9 \text{ ó } u=-4.\end{aligned}$$

Entonces, las soluciones de esta ecuación son $u=-9$ y $u=-4$.

Reemplacemos u por x^2 para obtener las soluciones de la ecuación original:

Si $u=-9$, entonces $x^2=-9$ y así $x=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9}i=\pm 3i$.

Si $u=-4$, entonces $x^2=-4$ y así $x=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4}i=\pm 2i$.

Luego, las soluciones de la ecuación original son $x_1=3i$, $x_2=-3i$, $x_3=2i$ y $x_4=-2i$.

En este caso las raíces son conjugadas dos a dos, es decir, $\bar{x_1}=x_2$, $\bar{x_2}=x_1$, $\bar{x_3}=x_4$ y $\bar{x_4}=x_3$.

4. La ecuación $4x^4+11x^2-3=0$ es de forma cuadrática, porque si hacemos $u=x^2$, la ecuación se convierte en $4u^2+11u-3=0$ que es una ecuación cuadrática en u.

   Apliquemos la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $4u^2+11u-3=0$ con $a=4$, $b=11$ y $c=-3$:

$$\begin{aligned}x&=\frac{-11\pm\sqrt{(11)^2-4(4)(-3)}}{2(4)}\\&=\frac{-11\pm\sqrt{121+48}}{8}\\&=\frac{-11\pm\sqrt{169}}{8}\\&=\frac{-11\pm 13}{8}.\end{aligned}$$

   Luego, las raíces de la ecuación son

$$u=\frac{-11+13}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \text{ y } u=\frac{-11-13}{8}=\frac{-24}{8}=-3.$$

   Reemplacemos u por x^2 para obtener las raíces de la ecuación original:

   Si $u=\frac{1}{4}$ entonces $x^2=\frac{1}{4}$ y así, $x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$.

   si $u=-3$, entonces $x^2=-3$ y así, $x=\pm\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}i$.

   Luego, las raíces de la ecuación original son $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_3=\sqrt{3}i$ y $x_4=-\sqrt{3}i$.

   Observamos que las dos últimas raíces son conjugadas, es decir, $\bar{x_3}=x_4$ y $\bar{x_4}=x_3$.

Ejercicicios propuestos

En cada numeral, hallar las raíces de la ecuación.

1. $3x^2 - 2x + 5 = 0$.
2. $4x^2 - 5x + 3 = 0$.
3. $x^4 - 1 = 0$.
4. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.
5. $x^4 - 45x^2 - 196 = 0$.

Respuestas

1. $\dfrac{1}{3} \pm \dfrac{\sqrt{14}}{3}i$.
2. $\dfrac{5}{8} \pm \dfrac{\sqrt{23}}{8}i$.
3. ± 1, $\pm i$.
4. ± 1, $\pm 2i$.
5. ± 7, $\pm 2i$.

Lección 86

Ejercicios sobre ecuaciones

En esta lección veremos ejemplos de solución de ecuaciones utilizando los métodos ya estudiados. Incluiremos ecuaciones de forma cuadrática, ecuaciones fraccionarias, ecuaciones con radicales y ecuaciones con exponentes racionales. Además hallaremos todas sus soluciones, si las tienen, en el conjunto de los números complejos.

Ejemplo 86.1

En cada numeral, resolver la ecuación.

1. $2\left(x^2+2x\right)^2+9\left(x^2+2x\right)+10=0$.
2. $6u^{-1/2}-17u^{-1/4}+5=0$.
3. $\dfrac{y-1}{y}+2=3\left(\dfrac{y}{y-1}\right)$.

Solución

1. La ecuación es de forma cuadrática puesto que si hacemos $u=x^2+2x$ obtenemos $2u^2+9u+10=0$ que es una ecuación cuadrática en u.

   Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned}2u^2+9u+10&=0\\(u+2)(2u+5)&=0\\u+2=0 \quad &\text{ó} \quad 2u+5=0\\u=-2 \quad &\text{ó} \quad u=-\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

   Como $u=x^2+2x$ tenemos que:

$$x^2+2x=-2 \qquad \text{ó} \qquad x^2+2x=-\frac{5}{2}.$$

   Resolvamos cada una de estas ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado:

$$\begin{aligned}x^2+2x+1&=-2+1 & \qquad x^2+2x+1&=-\frac{5}{2}+1\\(x+1)^2&=-1 & (x+1)^2&=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$x+1=\pm\sqrt{-1} \qquad\qquad x+1=\pm\sqrt{-\frac{3}{2}}$$

$$x+1=\pm i \qquad\qquad x+1=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}i$$

$$x=-1\pm i \qquad\qquad x=-1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}i.$$

Las soluciones de la ecuación dada son $x=-1+i$, $x=-1-i$, $x=-1+\frac{\sqrt{6}}{2}i$ y $x=-1-\frac{\sqrt{6}}{2}i$.

Comprobemos que $x=-1+i$ es solución de la ecuación:

$2[(-1+i)^2+2(-1+i)]^2+9[(-1+i)^2+2(-1+i)]+10=2(1-2i+i^2-2+2i)^2+9(1-2i+i^2-2+2i)+10=2(-2)^2+9(-2)+10=8-18+10=0.$

Luego, $x=-1+i$ es solución de la ecuación.

De igual manera podemos comprobar que los otros valores son soluciones de la ecuación.

2. La ecuación es de forma cuadrática porque si hacemos $z=u^{-1/4}$, como $z^2=\left(u^{-1/4}\right)^2=u^{-1/2}$ obtenemos $6z^2-17z+5=0$, que es una ecuación cuadrática en z.

   Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 6z^2-17z+5&=0\\ (3z-1)(2z-5)&=0\\ 3z-1=0 \quad &\text{ó} \quad 2z-5=0\\ z=\frac{1}{3} \quad &\text{ó} \quad z=\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

   Como $z=u^{-1/4}$ tenemos que:

$$u^{-1/4}=\frac{1}{3} \quad \text{ó} \quad u^{-1/4}=\frac{5}{2}.$$

   Resolvamos cada una de estas ecuaciones:

$$\frac{1}{u^{1/4}}=\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{u^{1/4}}=\frac{5}{2}$$

$$u^{1/4}=3 \qquad u^{1/4}=\frac{2}{5}$$

$$u=3^4 \qquad u=\left(\frac{2}{5}\right)^4 \quad \text{Elevamos al exponente 4 en ambos lados de cada ecuación}$$

$$u=81 \qquad u=\frac{16}{625}.$$

Veamos si estos dos valores son soluciones de la ecuación original:

Si $u = 81$:

$6(81)^{-1/2} - 17(81)^{-1/4} + 5 = \dfrac{6}{\sqrt{81}} - \dfrac{17}{\sqrt[4]{81}} + 5 = \dfrac{6}{9} - \dfrac{17}{3} + 5 = \dfrac{6 - 51 + 45}{9} = \dfrac{0}{9} = 0.$

Luego, $u = 81$ es solución de la ecuación dada.

Si $u = \dfrac{16}{625}$:

$6\left(\dfrac{16}{625}\right)^{-1/2} - 17\left(\dfrac{16}{625}\right)^{-1/4} + 5 = 6\sqrt{\dfrac{625}{16}} - 17\sqrt[4]{\dfrac{625}{16}} + 5 = 6\left(\dfrac{25}{4}\right) - 17\left(\dfrac{5}{2}\right) + 5 =$
$\dfrac{75 - 85 + 10}{2} = 0.$ Luego, $u = \dfrac{16}{625}$ es solución de la ecuación dada.

Por tanto, las soluciones de la ecuación dada son $u = 81$ y $u = \dfrac{16}{625}$.

3. Para resolver la ecuación hacemos $u = \dfrac{y-1}{y}$ y como $\dfrac{y}{y-1} = \dfrac{1}{u}$ obtenemos la ecuación $u + 2 = \dfrac{3}{u}$.

   Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} u^2 + 2u &= 3 && \text{Multiplicamos ambos lados por } u \\ u^2 + 2u - 3 &= 0 \\ (u+3)(u-1) &= 0 \\ u + 3 = 0 \;\; &\text{ó} \;\; u - 1 = 0 \\ u = -3 \;\; &\text{ó} \;\; u = 1. \end{aligned}$$

   Como $u = \dfrac{y-1}{y}$ tenemos que:

$$\frac{y-1}{y} = -3 \quad \text{ó} \quad \frac{y-1}{y} = 1.$$

   Resolvamos cada una de estas ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} y - 1 = -3y & y - 1 = y & \text{Multiplicamos por } y \text{ ambos lados de cada ecuación} \\ 4y = 1 & -1 = 0 & \\ y = \dfrac{1}{4} & \text{No tiene solución.} & \end{array}$$

   Comprobemos que $y = \dfrac{1}{4}$ es solución de la ecuación original:

$$\frac{\frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{4}} + 2 = 3\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - 1}\right) \; ; \; \frac{-3/4}{1/4} + 2 = 3\left(\frac{1/4}{-3/4}\right) \; ; \; -3 + 2 = -1 \; ; \; -1 = -1.$$

Luego, $y = \dfrac{1}{4}$ es la única solución de la ecuación.

Ejemplo 86.2

En cada numeral, resolver la ecuación.

1. $4 - (3 - x)^{2/3} = 0$.
2. $\sqrt{3x + 10} + \sqrt{x + 2} = \sqrt{10x + 16}$.
3. $(x + 2)^3 - 64 = 0$.
4. $4(x + 1)^{1/2} - 5(x + 1)^{3/2} + (x + 1)^{5/2} = 0$.

Solución

1. Podemos resolver esta ecuación expresando la potencia con exponente racional como un radical.

$$4 - (3 - x)^{2/3} = 0$$

$$4 - \sqrt[3]{(3 - x)^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
4 &= \sqrt[3]{(3 - x)^2} && \text{Aislamos el radical}\\
4^3 &= (3 - x)^2 && \text{Elevamos al cubo en ambos lados de la ecuación}\\
\pm\sqrt{2^6} &= 3 - x && \text{Tomamos raíz cuadrada en ambos lados}\\
\pm 2^3 &= 3 - x\\
\pm 8 - 3 &= -x\\
x &= 3 \mp 8\\
x = -5 \ &\text{ ó } \ x = 11.
\end{aligned}$$

Veamos si estos dos valores son soluciones de la ecuación original:

Si $x = -5$: $4 - (3 - (-5))^{2/3} = 4 - (8)^{2/3} = 4 - \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 4 - 2^2 = 4 - 4 = 0$. Luego, $x = -5$ es solución de la ecuación.

Si $x = 11$: $4 - (3 - 11)^{2/3} = 4 - (-8)^{2/3} = 4 - \left(\sqrt[3]{-8}\right)^2 = 4 - (-2)^2 = 4 - 4 = 0$. Luego, $x = 11$ es solución de la ecuación.

Por tanto, la ecuación dada tiene dos soluciones: $x = -5$ y $x = 11$.

2. Para resolver esta ecuación con radicales, como ya tenemos un radical aislado en un lado de la ecuación, iniciamos elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\left(\sqrt{3x + 10} + \sqrt{x + 2}\right)^2 = \left(\sqrt{10x + 16}\right)^2$$

$$3x + 10 + 2\sqrt{3x + 10}\,\sqrt{x + 2} + x + 2 = 10x + 16$$

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{(3x+10)(x+2)} &= 6x+4 \\
\sqrt{3x^2+16x+20} &= 3x+2 \\
\left(\sqrt{3x^2+16x+20}\right)^2 &= (3x+2)^2 && \text{Elevamos al cuadrado ambos lados} \\
3x^2+16x+20 &= 9x^2+12x+4 \\
0 &= 6x^2-4x-16 \\
0 &= 2(3x^2-2x-8) \\
0 &= 3x^2-2x-8 \\
0 &= (x-2)(3x+4) \\
x = 2 \ \text{ ó } \ x &= -\frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Veamos si estos dos valores son soluciones de la ecuación original:

Si $x=2$: $\sqrt{16}+\sqrt{4}=\sqrt{36}$; $4+2=6$; $6=6$. Luego, $x=2$ es solución de la ecuación.

Si $x=-\dfrac{4}{3}$: $\sqrt{3(-\frac{4}{3})+10}+\sqrt{-\frac{4}{3}+2}=\sqrt{10\left(-\frac{4}{3}\right)+16}$; $\sqrt{6}+\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$; $\sqrt{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$; $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\neq\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ Luego, $x=-\dfrac{4}{3}$ no es solución de la ecuación.

Por tanto, la única solución de la ecuación es $x=2$.

3.
$$
\begin{aligned}
(x+2)^3-64 &= 0 \\
(x+2)^3-4^3 &= 0 && \text{Diferencia de cubos} \\
(x+2-4)\left[(x+2)^2+4(x+2)+16\right] &= 0 && \text{Factorizamos la diferencia de cubos} \\
(x-2)\left[(x+2)^2+4(x+2)+16\right] &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x-2=0 \ \text{ ó } \ (x+2)^2+4(x+2)+16=0 \\
x=2 \ \text{ ó } \ (x+2)^2+4(x+2)+16=0.
\end{aligned}
$$

Resolvamos la segunda ecuación: Si hacemos $u=x+2$ obtenemos $u^2+4u+16=0$. Como su discriminante $b^2-4ac=4^2-4(1)(16)=-48$, esta ecuación no tiene solución en los reales. Usemos la fórmula cuadrática para hallar sus soluciones en el conjunto de los números complejos:

$$u=\frac{-4\pm\sqrt{-48}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{48}i}{2}=\frac{-4\pm4\sqrt{3}i}{2}=-2\pm2\sqrt{3}i.$$

Por tanto, la ecuación $u^2+4u+16=0$ tiene dos soluciones: $u=-2+2\sqrt{3}i$ y $u=-2-2\sqrt{3}i$.

Como $u=x+2$ entonces $x+2=-2\pm2\sqrt{3}i$, es decir, $x=-4\pm2\sqrt{3}i$.

Por tanto, la ecuación dada tiene tres soluciones: $x = 2$, $x = -4 + 2\sqrt{3}i$ y $x = -4 - 2\sqrt{3}i$.

Comprobar que los valores hallados satisfacen la ecuación.

4. $4(x+1)^{1/2} - 5(x+1)^{3/2} + (x+1)^{5/2} = 0$

$$(x+1)^{1/2}\left[4 - 5(x+1) + (x+1)^2\right] = 0 \qquad \text{Factor común } (x+1)^{1/2}$$

$$(x+1)^{1/2}\left[(x+1)^2 - 5(x+1) + 4\right] = 0 \qquad \text{El segundo factor es de la forma } u^2 - 5u + 4 \text{ con } u = x+1$$

$$(x+1)^{1/2}\left[(x+1) - 1\right]\left[(x+1) - 4\right] = 0 \qquad \text{Factorizamos el segundo factor}$$

$$(x+1)^{1/2}(x)(x-3) = 0$$

$$x(x+1)^{1/2}(x-3) = 0$$

$$x = 0 \ \text{ ó } \ (x+1)^{1/2} = 0 \text{ ó } x - 3 = 0$$

$$x = 0 \ \text{ ó } \ x = -1 \ \text{ ó } \ x = 3.$$

Luego, $x = 0$, $x = -1$ y $x = 3$ son las soluciones de la ecuación.

Comprobar que los valores hallados satisfacen la ecuación.

Ejercicios propuestos

En cada numeral, resolver la ecuación dada.

1. $(x^2 + 4x)^2 + 4(x^2 + 4x) - 32 = 0$.
2. $\dfrac{3x+5}{3x-1} - \dfrac{5x+3}{x+1} = 0$.
3. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 5$.
4. $27x^{3/2} - 1 = 26x^{3/4}$.

Respuestas

1. $-2 \pm 2i$, $-2 \pm 2\sqrt{2}$.
2. $1, -\dfrac{2}{3}$.
3. $\dfrac{5}{2} \pm \dfrac{\sqrt{21}}{2}, -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.
4. 1.

Lección 87

Ejercicios sobre sistemas de dos ecuaciones en dos variables

En esta lección presentaremos una serie de ejemplos resueltos sobre sistemas de ecuaciones en dos variables, utilizando los métodos aprendidos en lecciones anteriores, con el propósito de que el lector adquiera más agilidad en su solución.

Ejemplo 87.1

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} 5x + 3y = 13 \\ 3x - y = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x + 5y = 13 \\ 7x - 4y = 25. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = -3 \\ 3y = 2x + 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4 = 4x \\ x + y = 2. \end{cases}$

Solución

1. $\begin{cases} 5x + 3y = 13 & (1) \\ 3x - y = 5 & (2) \end{cases}$

   Despejamos y de la ecuación (2) y tenemos

   $$y = 3x - 5 \qquad (3)$$

   Sustituimos la expresión para y en la ecuación (1) y obtenemos

   $5x + 3(3x - 5) = 13$. Resolviendo esta ecuación obtenemos $x = 2$.

   Sustituyendo x por 2 en la ecuación (3) encontramos el correspondiente valor de y, es decir, $y = 3(2) - 5 = 1$.

   Luego, $x = 2$ y $y = 1$ es la solución del sistema.

Verifiquemos que estos valores satisfacen el sistema.

Reemplazando x por 2 y y por 1 en la ecuación (1) tenemos $5(2)+3(1)=10+3=13$, es decir, estos valores satisfacen la primera ecuación.

Reemplazando x por 2 y y por 1 en la ecuación (2) tenemos $3(2)-1=6-1=5$ y vemos que también satisfacen la segunda ecuación.

Como cada una de las ecuaciones del sistema representa una linea recta, éstas se cortan en el punto $(2,1)$.

2. $\begin{cases} 6x+5y=13 & (1) \\ 7x-4y=25 & (2) \end{cases}$

Vamos a resolver este sistema usando el método de adición o sustracción.

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación (1) por 4 y tenemos

$$24x+20y=52 \qquad (3)$$

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación (2) por 5 y tenemos

$$35x-20y=125 \qquad (4)$$

Sumamos la ecuación (3) con la ecuación (4) para eliminar y y obtenemos $59x=177$, y por tanto, $x=3$.

Reemplazando x por 3 en la ecuación (1), encontramos el correspondiente valor de y, o sea, $6(3)+5y=13$. Resolviendo esta ecuación se tiene $y=-1$.

Luego, la solución del sistema es $x=3$ y $y=-1$.

Verificar que estos valores satisfacen las ecuaciones del sistema y representar gráficamente las ecuaciones para comprobar que las rectas se cortan en el punto $(3,-1)$.

3. $\begin{cases} 4x^2-9y^2=-3 & (1) \\ 3y=2x+1 & (2) \end{cases}$

Despejando y de (2) tenemos

$$y=\frac{2x+1}{3} \qquad (3)$$

y reemplazando esta expresión para y en (1) obtenemos

$$4x^2-9\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2=-3.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$4x^2-9\left(\frac{4x^2+4x+1}{9}\right)=-3$$

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x^2 - 4x - 1 &= -3 \\ -4x &= -2 \\ x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

El valor de x hallado lo reemplazamos en la ecuación (3) y encontramos el correspondiente valor de y, así: $y = \dfrac{2\left(\frac{1}{2}\right)+1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Luego, la solución del sistema es $x = \dfrac{1}{2}$ y $y = \dfrac{2}{3}$.

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4 = 4x & (1) \\ x + y = 2 & (2) \end{cases}$

   Despejamos x de (2) y obtenemos

   $$x = 2 - y \qquad (3)$$

   y reemplazando esta expresión para x en (1) obtenemos

   $$(2-y)^2 + y^2 + 4 = 4(2-y).$$

   Resolvamos esta ecuación:

   $$\begin{aligned} 4 - 4y + y^2 + y^2 + 4 &= 8 - 4y \\ 2y^2 + 8 - 4y - 8 + 4y &= 0 \\ 2y^2 &= 0 \\ y &= 0. \end{aligned}$$

   El valor de y encontrado lo reemplazamos en la ecuación (3) y hallamos el correspondiente valor de x, así: $x = 2 - 0 = 2$.

   Por tanto, la solución al sistema es $x = 2$ y $y = 0$.

Ejemplo 87.2

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} 9x^2 + y^2 = 2 \\ 18x^2 + 3y^2 = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x^2 + 5y^2 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6x^2 + 5y^2 + 2x = 3 \\ 5x^2 + 3y^2 - 4x = -2. \end{cases}$

Solución

1. $\begin{cases} 9x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ 18x^2 + 3y^2 = 5 & (2) \end{cases}$

   Eliminamos la variable y y para ello multiplicamos ambos miembros de la ecuación (1) por 3 y obtenemos
   $$27x^2 + 3y^2 = 6 \qquad (3)$$
   Restamos, miembro a miembro, la ecuación (2) de la ecuación (3) y tenemos $9x^2 = 1$, cuya solución es $x = \pm\dfrac{1}{3}$.

   Con estos valores de x, encontramos los correspondientes valores de y, reemplazándolos en una de las ecuaciones iniciales.

   Reemplazando x por $\dfrac{1}{3}$ en la ecuación (1) tenemos $9\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + y^2 = 2$ y resolviendo esta ecuación encontramos $y = \pm 1$.

   Por tanto, las soluciones son $x = \dfrac{1}{3}$, $y = 1$ y $x = \dfrac{1}{3}$, $y = -1$.

   Vemos que al sustituir x por $-\dfrac{1}{3}$ en la ecuación (1) se obtiene el mismo resultado anterior, o sea, $y = \pm 1$.

   Por tanto, las soluciones son $x = -\dfrac{1}{3}$, $y = 1$ y $x = -\dfrac{1}{3}$, $y = -1$.

   Luego, las soluciones al sistema son $x = \dfrac{1}{3}$, $y = 1$; $x = \dfrac{1}{3}$, $y = -1$; $x = -\dfrac{1}{3}$, $y = 1$; $x = -\dfrac{1}{3}$, $y = -1$.

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & (1) \\ 3x^2 + 5y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

   Eliminamos la variable x y para ello multiplicamos ambos miembros de la ecuación (1) por 3 y obtenemos
   $$3x^2 + 3y^2 = 75 \qquad (3)$$
   Restamos, miembro a miembro, la ecuación (2) de la ecuación (3) y tenemos $-2y^2 = 74$, cuya solución es $y = \pm\sqrt{-37} = \pm\sqrt{37}i$.

   Con estos valores de y, encontramos los correspondientes valores de x, reemplazándolos en una de las ecuaciones iniciales.

   Reemplazando y por $\sqrt{37}i$ en la ecuación (1) tenemos $x^2 + \left(\sqrt{37}i\right)^2 = 25$, es decir, $x^2 - 37 = 25$, o sea $x^2 = 62$. Luego, $x = \pm\sqrt{62}$.

   Luego, las soluciones son $x = \sqrt{62}$, $y = \sqrt{37}i$ y $x = -\sqrt{62}$, $y = \sqrt{37}i$.

   Al reemplazar y por $-\sqrt{37}i$, obtenemos el mismo resultado anterior, es decir, $x = \pm\sqrt{62}$.

Por tanto, las soluciones son $x = \sqrt{62}$, $y = -\sqrt{37}i$ y $x = -\sqrt{62}$, $y = -\sqrt{37}i$.

Luego, las soluciones al sistema son $x = \sqrt{62}$, $y = \sqrt{37}i$; $x = -\sqrt{62}$, $y = \sqrt{37}i$; $x = \sqrt{62}$, $y = -\sqrt{37}i$; $x = -\sqrt{62}$, $y = -\sqrt{37}i$.

3. $\begin{cases} 6x^2 + 5y^2 + 2x = 3 & (1) \\ 5x^2 + 3y^2 - 4x = -2 & (2) \end{cases}$

Eliminamos el término en y^2 y para ello:

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación (1) por 3 y tenemos

$$18x^2 + 15y^2 + 6x = 9 \qquad (3)$$

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación (2) por 5 y tenemos

$$25x^2 + 15y^2 - 20x = -10 \qquad (4)$$

Restamos miembro a miembro la ecuación (3) de la ecuación (4) y obtenemos

$$7x^2 - 26x = -19.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 7x^2 - 26x + 19 &= 0 \\ (7x - 19)(x - 1) &= 0 \\ x = \frac{19}{7} \ \text{ ó } \ x &= 1. \end{aligned}$$

Reemplazando cada valor de x en una de las ecuaciones iniciales, obtenemos los correspondientes valores de y.

Sustituyendo x por $\frac{19}{7}$ en la ecuación (2) obtenemos $5\left(\frac{19}{7}\right)^2 + 3y^2 - 4\left(\frac{19}{7}\right) = -2$ y resolviendo esta ecuación encontramos $y = \pm\frac{\sqrt{457}}{7}i$.

Por tanto, las soluciones son $x = \frac{19}{7}$, $y = \frac{\sqrt{457}}{7}i$; $x = \frac{19}{7}$, $y = -\frac{\sqrt{457}}{7}i$

Reemplazando x por 1 en la ecuación (2) tenemos $5(1)^2 + 3y^2 - 4(1) = -2$ y resolviendo esta ecuación obtenemos $y = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.

Luego, las soluciones son $x = 1$, $y = i$; $x = 1$, $y = -i$.

Por tanto, las soluciones al sistema son $x = \frac{19}{7}$, $y = \frac{\sqrt{457}}{7}i$; $x = \frac{19}{7}$, $y = -\frac{\sqrt{457}}{7}i$; $x = 1$, $y = i$; $x = 1$, $y = -i$.

Ejercicios propuestos

Resolver los siguientes sistemas

1. $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - 2y = 16. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x^2 - 2y^2 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y^2 = 4x \\ x + y = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x^2 - 6y^2 = 3 \\ 3x^2 + 4y^2 = 17. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 8x = 2 \\ 2x^2 - 5y^2 + 4x = 3. \end{cases}$

Respuestas

1. $x = 4$, $y = -2$.
2. $x = 3$, $y = 2$; $x = 3$, $y = -2$; $x = -3$, $y = 2$; $x = -3$, $y = -2$.
3. $x = 1$, $y = 2$; $x = 9$, $y = -6$.
4. $x = \sqrt{3}$, $y = \sqrt{2}$; $x = \sqrt{3}$, $y = -\sqrt{2}$; $x = -\sqrt{3}$, $y = \sqrt{2}$; $x = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{2}$.
5. $x = 4$, $y = 3$; $x = 4$, $y = -3$.

Lección 88

Logaritmos

En esta lección veremos el concepto de logaritmo, la relación entre potencias y logaritmos y las propiedades de los logaritmos. Luego presentaremos una serie de ejemplos resueltos que muestran el manejo de la definición y las propiedades y finalmente se propondrán algunos ejercicios con respuestas, para que el lector los solucione y adquiera una mayor destreza.

Logaritmo

Sea a un número positivo diferente de 1. Si N es cualquier número real positivo, el **logaritmo** de N con base a, denotado $log_a N$, es el exponente v al que debe elevarse la base a para obtener el número N.

Esto es,

$$log_a N = v \text{ si y sólo si } a^v = N.$$

Por ejemplo,

$log_8 64 = 2$, ya que $8^2 = 64$.

$log_4 64 = 3$, ya que $4^3 = 64$.

$log_{81} 9 = \frac{1}{2}$, ya que $81^{\frac{1}{2}} = 9$.

$log_2 1 = 0$, ya que $2^0 = 1$.

$log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = -2$, ya que $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$.

$a^v = N$ se conoce como la **forma exponencial** y $log_a N = v$ como la **forma logarítmica**. Las formas logarítmica y exponencial son equivalentes, por tanto, se puede intercambiar de una forma a la otra.

Ejemplo 88.1

Expresar en forma exponencial, las siguientes formas logarítmicas:

1. $log_3 9 = 2$.
2. $log_6 36 = 2$.
3. $log_2 \frac{1}{4} = -2$.

4. $log_{\frac{1}{4}}\dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{2}$.

Solución

1. $3^2 = 9$.
2. $6^2 = 36$.
3. $2^{-2} = \dfrac{1}{4}$.
4. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{8}$.

Ejemplo 88.2

Expresar en forma logarítmica, las siguientes formas exponenciales:

1. $3^4 = 81$.
2. $2^5 = 32$.
3. $(25)^{\frac{1}{2}} = 5$.
4. $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$.

Solución

1. $log_3 81 = 4$.
2. $log_2 32 = 5$.
3. $log_{25} 5 = \dfrac{1}{2}$.
4. $log_3 \dfrac{1}{9} = -2$.

Ejemplo 88.3

Encontrar el valor de los siguientes logaritmos:

1. $log_{10} 100$.
2. $log_5 625$.
3. $log_{144} 12$.
4. $log_8 64$.
5. $log_3 3$.
6. $log_5 1$.

Solución

1. $log_{10} 100 = 2$ porque $10^2 = 100$.

2. $log_5 625 = 4$ porque $5^4 = 625$.
3. $log_{144} 12 = \frac{1}{2}$ porque $(144)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{144} = 12$.
4. $log_8 64 = 2$ porque $8^2 = 64$.
5. $log_3 3 = 1$ porque $3^1 = 3$.
6. $log_5 1 = 0$ porque $5^0 = 1$.

En general, si a es un número real positivo diferente de 1,

$$log_a a = 1 \quad y \quad log_a 1 = 0.$$

Vamos a resolver algunas ecuaciones sencillas que involucran logaritmos, usando la definición.

Ejemplo 88.4

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $log_3 x = 2$.
2. $log_4 y = -\frac{3}{2}$.
3. $log_x 25 = 2$.
4. $log_{10}(3x^2 + 2x - 4) = 0$.

Solución

1. Expresando $log_3 x = 2$ en forma exponencial, tenemos $3^2 = x$, o sea, $x = 9$.

2. $4^{-\frac{3}{2}} = y$ Expresamos en forma exponencial

   $\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = y$ Escribimos la potencia con exponente positivo

   $\frac{1}{8} = y$ Realizamos operaciones.

3. Expresando $log_x(25) = 2$ en forma exponencial tenemos $x^2 = 25$, o sea, $x = \pm 5$. Como la base x es un número positivo, descartamos -5 y por tanto la solución es $x = 5$.

4. $10^0 = 3x^2 + 2x - 4$ Expresamos en forma exponencial

   $1 = 3x^2 + 2x - 4$ Porque $10^0 = 1$

   $3x^2 + 2x - 5 = 0$ Reducimos términos semejantes

   $(3x + 5)(x - 1) = 0$ Factorizamos

   $x = -\frac{5}{3}$ ó $x = 1$.

   Es fácil verificar que los dos valores son soluciones de la ecuación.

Algunos logaritmos especiales

Aunque la base de un logaritmo es cualquier número positivo a diferente de 1, hay dos bases que son muy utilizadas y que explicaremos a continuación.

Una de ellas es el número 10. Los logaritmos con esta base se conocen con el nombre de **logaritmos comunes**, vulgares o de Briggs en honor a Henry Briggs quién construyó la primera tabla de logaritmos con base 10.

La otra base es el número irracional e y los logaritmos con esta base se conocen como **logaritmos naturales** o logaritmos neperianos, en honor al matemático Juan Néper, que fué su inventor.

Para expresar los logaritmos con estas bases, usamos las siguientes notaciones:

$$log_{10}N = logN.$$

$$log_e N = lnN.$$

Esta última expresión se lee "logaritmo natural de N".

Leyes de los logaritmos

Sean a un número positivo diferente de 1 y M y N números positivos.

1. $log_a MN = log_a M + log_a N.$

   El logaritmo del producto de dos números positivos es igual a la suma de los logaritmos de los números.

2. $log_a \left(\dfrac{M}{N}\right) = log_a M - log_a N.$

   El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

3. Si p es un número real, $log_a M^p = p \cdot log_a M.$

   El logaritmo de una potencia de un número positivo es igual al producto del exponente por el logaritmo del número.

Nota:

$log_a(M + N) \neq log_a M + log_a N.$

$log_a(M - N) \neq log_a M - log_a N.$

Por ejemplo, $log(4 + 16) = log(20) = log(4)(5) = log4 + log5 \neq log4 + log(16).$

Ejemplo 88.5

Usando las leyes de los logaritmos, reducir, en cada numeral, la expresión dada a un solo logaritmo.

1. $log_3 5 - log_3(10).$

2. $logc + 2logx - log(x - 1)$.

3. $2log3 + 4log2 - 3log10$.

Solución

1. Aplicando la ley del logaritmo de un cociente, obtenemos

$$log_3 5 - log_3(10) = log_3\left(\frac{5}{10}\right) = log_3\left(\frac{1}{2}\right) = log_3 1 - log_3 2 = 0 - log_3 2 = -log_3 2.$$

2. Como

$$\begin{aligned} 2logx &= logx^2 && \text{Logaritmo de una potencia} \\ logc + logx^2 &= log(cx^2) && \text{Logaritmo de un producto} \\ log(cx^2) - log(x-1) &= log\left(\frac{cx^2}{x-1}\right) && \text{Logaritmo de un cociente.} \end{aligned}$$

entonces,

$$logc + 2logx - log(x - 1) = log\left(\frac{cx^2}{x-1}\right).$$

3. Como

$$\begin{aligned} 2log3 &= log3^2 \\ 4log2 &= log2^4 \\ 3log10 &= log10^3 \\ 2log3 + 4log2 &= log3^2 + log2^4 = log(3^2 2^4) \\ log(3^2 2^4) - log10^3 &= log\left(\frac{3^2 2^4}{10^3}\right) = log\left(\frac{144}{1.000}\right) = log\left(\frac{18}{125}\right) \end{aligned}$$

entonces,

$$2log3 + 4log2 - 3log10 = log\left(\frac{18}{125}\right).$$

Ejercicios propuestos

1. Expresar en forma logarítmica:
   (a) $2^7 = 128$.
   (b) $2^{-6} = \frac{1}{64}$.
   (c) $10^3 = 1.000$.
   (d) $5^3 = 125$.

2. Expresar en forma exponencial:
   (a) $log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$.

(b) $log_a x = 2$.

(c) $log 1 = 0$.

(d) $log_3 \left(\frac{1}{243} \right) = -5$.

3. En los siguientes numerales, escribir la expresión dada como un solo logaritmo.

(a) $log 2 - log 3 + log 5$.

(b) $\frac{1}{2} ln(25) - \frac{1}{3} ln(64) + \frac{2}{3} ln(27)$.

(c) $3 log_a b - \frac{1}{2} log_a c$, con a, b y c números reales positivos y $a \neq 1$.

Respuestas

1. (a) $log_2(128) = 7$.

(b) $log_2 \left(\frac{1}{64} \right) = -6$.

(c) $log(1.000) = 3$.

(d) $log_5(125) = 3$.

2. (a) $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

(b) $a^2 = x$.

(c) $10^0 = 1$.

(d) $3^{-5} = \frac{1}{243}$.

3. (a) $log \left(\frac{10}{3} \right)$.

(b) $ln \left(\frac{45}{4} \right)$.

(c) $log_a \left(\frac{b^3}{c^{\frac{1}{2}}} \right)$.

Lección 89

Ecuaciones logarítmicas en una variable

En esta lección, aprenderemos qué es una ecuación logarítmica y cómo resolverla utilizando las definiciones y leyes de los logaritmos que se estudiaron en la lección anterior.

Una **ecuación logarítmica** en una variable, es una ecuación en la que aparecen logaritmos de una o más expresiones en la variable.

Por ejemplo, $log x + log(x-1) = 2$ es una ecuación logarítmica en la variable x.

Las ecuaciones logarítmicas se pueden resolver usando la definición y las leyes de los logaritmos, procediendo como sigue:

1. Si hay más de una expresión con logaritmos, usamos las leyes de los logaritmos, para reducirlas a un solo logaritmo.
2. Aislamos el logaritmo en un lado de la ecuación.
3. Escribimos la ecuación en forma exponencial.
4. Resolvemos la ecuación hallada en 3.

Los valores que se encuentren de la variable se deben chequear en la ecuación inicial para ver si la satisfacen. Debemos recordar que no pueden aparecer logaritmos de números negativos, y por tanto, los valores que conduzcan a éstos, no son soluciones de la ecuación original.

Ejemplo 89.1

En cada numeral, hallar los valores de x que satisfacen la ecuación:

1. $log_4(x+8) = 3$.
2. $log_{12}4 + log_{12}(x+6) = 2$.
3. $log_2(x^2 - 3x + 6) - log_2(x-1) = 2$.

Solución

1. Como en esta ecuación sólo hay un logaritmo y está al lado izquierdo, expresamos la ecuación en forma exponencial.

   $log_4(x+8) = 3$ es equivalente a $4^3 = x + 8$ cuya solución es $x = 56$.

   Veamos si $x = 56$ satisface la ecuación dada: $log_4(56+8) = log_4(64) = 3$.

   Luego, $x = 56$ es la solución de la ecuación original.

2. $log_{12}4 + log_{12}(x+6) = 2$

$$
\begin{aligned}
log_{12}4(x+6) &= 2 && \text{Logaritmo de un producto}\\
(12)^2 &= 4(x+6) && \text{Expresamos en forma exponencial}\\
144 &= 4x+24 && \text{Efectuamos operaciones}\\
x &= 30 && \text{Despejamos } x.
\end{aligned}
$$

Veamos si $x = 30$ satisface la ecuación original.

$log_{12}4 + log_{12}(30+6) = log_{12}4(36) = log_{12}(144) = log_{12}(12)^2 = 2log_{12}(12) = 2.$

Por tanto, la solución es $x = 30$.

3. $log_2(x^2 - 3x + 6) - log_2(x-1) = 2$

$$
\begin{aligned}
log_2\left(\frac{x^2-3x+6}{x-1}\right) &= 2 && \text{Logaritmo de un cociente}\\
2^2 &= \frac{x^2-3x-6}{x-1} && \text{Expresamos en forma exponencial}\\
4x-4 &= x^2-3x+6 && \text{Efectuamos operaciones}\\
x^2-7x+10 &= 0 && \text{Trasponemos términos}\\
(x-5)(x-2) &= 0 && \text{Factorizamos}\\
x = 5 \quad &\text{ó} \quad x = 2.
\end{aligned}
$$

Verifiquemos si estos valores posibles satisfacen la ecuación original.

Si $x = 5$: $log_2(5^2-3(5)+6)-log_2(5-1) = log_2(16)-log_24 = log_22^4-log_22^2 = 4-2 = 2.$

Si $x = 2$: $log_2(2^2-3(2)+6)-log_2(2-1) = log_24-log_21 = log_22^2-log_21 = 2-0 = 2.$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = 5$ y $x = 2$.

Ejemplo 89.2

Resolver para x, las siguientes ecuaciones:

1. $log_6(x+3) + log_6(x-2) = 1.$
2. $log_23 + log_2x = log_25 + log_2(x-2).$
3. $log(x+3) = logx + log3.$

Solución

1. $log_6(x+3) + log_6(x-2) = 1$

$$
\begin{aligned}
log_6(x+3)(x-2) &= 1 && \text{Logaritmo de un producto}\\
6^1 &= x^2+x-6 && \text{Expresamos en forma exponencial}\\
x^2+x-12 &= 0 && \text{Trasponemos términos}\\
(x+4)(x-3) &= 0 && \text{Factorizamos}\\
x = -4 \quad &\text{ó} \quad x = 3.
\end{aligned}
$$

Verifiquemos si estos valores satisfacen la ecuación original:

Si $x = -4$: $log_6(-4+3) + log_6(-4-2) = log_6(-1) + log_6(-6)$, los cuales no están definidos. Por tanto, $x = -4$ no es solución de la ecuación original.

Si $x = 3$: $log_6(3+3) + log_6(3-2) = log_6 6 + log_6 1 = 1 + 0 = 1$. Este valor satisface la ecuación original y por tanto, $x = 3$ es la única solución de la ecuación dada.

2.
$$\begin{aligned}
log_2 3 + log_2 x &= log_2 5 + log_2(x-2) && \\
log_2 x - log_2(x-2) &= log_2 5 - log_2 3 && \text{Trasponemos términos}\\
log_2 \frac{x}{x-2} &= log_2 \frac{5}{3} && \text{Logaritmo de un cociente}\\
log_2 \frac{x}{x-2} - log_2 \frac{5}{3} &= 0 && \text{Trasponemos términos}\\
log_2 \frac{\frac{x}{x-2}}{\frac{5}{3}} &= 0 && \text{Logaritmo de un cociente}\\
log_2 \frac{3x}{5(x-2)} &= 0 && \text{Simplificamos la fracción compleja}\\
\frac{3x}{5(x-2)} &= 2^0 && \text{Expresamos en forma exponencial}\\
\frac{3x}{5x-10} &= 1 && \\
3x &= 5x - 10 && \text{Multiplicamos ambos lados por } 5x-10\\
x &= 5 && \text{Resolvemos para } x.
\end{aligned}$$

Verificamos si $x = 5$ satisface la ecuación original:

$log_2 3 + log_2 5 = log_2 5 + log_2(5-2)$; $log_2 3 + log_2 5 = log_2 5 + log_2 3$.

Por tanto, $x = 5$ es la solución buscada.

3.
$$\begin{aligned}
log(x+3) &= logx + log3 && \\
log(x+3) &= log(3x) && \text{Logaritmo del producto}\\
log(x+3) - log(3x) &= 0 && \text{Trasponemos términos}\\
log \frac{x+3}{3x} &= 0 && \text{Logaritmo del cociente}\\
10^0 &= \frac{x+3}{3x} && \text{Expresamos en forma exponencial}\\
1 &= \frac{x+3}{3x} && \\
3x &= x + 3 && \text{Multiplicamos ambos lados por } 3x\\
x &= \frac{3}{2} && \text{Resolvemos para } x.
\end{aligned}$$

Veamos si este valor satisface la ecuación original:

$log\left(\frac{3}{2} + 3\right) = log\frac{3}{2} + log3$; $log\frac{9}{2} = log\left(\frac{3}{2}\right)(3)$; $log\frac{9}{2} = log\frac{9}{2}$.

Por tanto, $x = \dfrac{3}{2}$ es la solución de la ecuación original.

Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

1. $log_5(3x + 7) - log_5(x - 5) = 2$.
2. $logx + log(x - 1) = log(4x)$.
3. $log_9(x - 5) + log_9(x + 3) = 1$.
4. $2logx = log2 + log(3x - 4)$.

Respuestas

1. 6.
2. 5.
3. 6.
4. 2 , 4.

Lección 90

Razones, proporciones y variaciones

En esta lección veremos los conceptos de razón como cociente de dos magnitudes[1], proporción como igualdad de razones, variación directa y variación inversa de magnitudes. Mostraremos algunos ejemplos resueltos en los cuales aplicamos los conceptos y propondremos otros que el lector debe resolver.

Razón

Una **razón** es el cociente entre dos cantidades.

La razón de un número a a un número b, b distinto de cero, que se escribe $\frac{a}{b}$ ó $a : b$ y se lee a es a b, es el cociente que se obtiene al dividir a entre b.

Si a y b son magnitudes del mismo tipo, se deben expresar en la misma unidad de medida para que la razón a/b tenga sentido. Por ejemplo, si queremos saber cuál es la razón de 15 centímetros a 3 metros, debemos convertir los centímetros a metros o los metros a centímetros. Como 3 metros equivalen a 300 centímetros, la razón de 15 centímetros a 3 metros es $\frac{15}{300}$, y como esta razón es una fracción, al simplificarla dividiendo numerador y denominador por 15 obtenemos $\frac{1}{20}$. Decimos entonces que la razón de 15 centímetros a 300 centímetros es de 1 a 20.

Ejemplo 90.1

1. ¿Cuál es la razón 5 metros a 8 centímetros?
2. Si un terreno rectangular tiene $0,6$ kilómetros de largo y 200 metros de ancho, ¿cuál es la razón entre el ancho y el largo?

Solución

1. Debemos expresar las magnitudes en la misma unidad. Como 5 metros son 500 centímetros, entonces la razón de 5 metros a 8 centímetros es $\frac{500}{8} = \frac{125}{2}$.
2. Como $0,6$ kilómetros son 600 metros, entonces la razón entre el ancho y el largo del terreno es $\frac{200}{600} = \frac{1}{3}$, que también podemos escribir $1 : 3$ y decimos que la razón entre el ancho y el largo es 1 a 3.

[1]Magnitud: Propiedad física que se puede medir.

Ejemplo 90.2

Si se realizó una encuesta entre jóvenes de 18 a 21 años de edad y se concluyó que 1 de cada 5 pueden votar en las próximas elecciones, entonces:

- La razón entre los que pueden votar y el total de jóvenes es $1:5$.
- La razón entre los que pueden votar y los que no pueden hacerlo es $1:4$.
- La razón entre los que no pueden votar y el total de los jóvenes es $4:5$.

En el ejemplo anterior, si queremos expresar los no votantes con respecto al total, podemos hacerlo así:

$$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{16}{20}=\cdots=\frac{4k}{5k}, \text{con } k \text{ un entero positivo.}$$

Así, si queremos saber cuál es el total de jóvenes que no pueden votar, teniendo en cuenta que el número total de encuestados fue 525, entonces, debemos multiplicar numerador y denominador de la razón $\frac{4}{5}$ por una constante k tal que $5k=525$, es decir por $k=\frac{525}{5}=105$. Luego,

$$\frac{4}{5}=\frac{4k}{5k}=\frac{4\cdot 105}{5\cdot 105}=\frac{420}{425}.$$

Por tanto, de los 525 jóvenes encuestados 420 no pueden votar.

Aunque frecuentemente una razón es una operación que compara cantidades de la misma magnitud, algunas veces se tienen razones de magnitudes de naturaleza diferente. Por ejemplo, en Física, la velocidad v promedio de un automóvil se expresa como $\frac{s}{t}$ que representa la razón entre la distancia s recorrida por el automóvil y el tiempo t utilizado para recorrerla.

Por ejemplo, si un automóvil recorre 580 kilómetros en 12 horas, entonces la velocidad promedio del automóvil es $\frac{580}{12}=\frac{285}{6}$ kilómetros por hora. Es decir, la razón entre la distancia recorrida y el tiempo utilizado es de 285 a 6.

Proporción

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones.

Por ejemplo, $\frac{8}{5}=\frac{24}{15}$ es una proporción que establece que las razones $\frac{8}{5}$ y $\frac{24}{15}$ son iguales.

En la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, con a y b distintos de cero, que se lee "a es a b como c es a d", a, b, c y d son los **términos** de la proporción.

Los términos a y d se llaman **extremos** y b y c **medios** de la proporción.

Si en la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, con a y b distintos de cero, multiplicamos ambos lados de la igualdad por bd obtenemos $ad=bc$. Es decir, en una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Si tenemos la proporción $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, entonces $ad = bc$. Por tanto, la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ también puede escribirse como $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Esto es, la proporción no se altera si se intercambian los medios. De manera similar podemos mostrar que la proporción no se altera si se intercambian los extremos, o si se invierten las razones.

Por ejemplo, la proporción $\frac{8}{5} = \frac{24}{15}$ no se altera si la escribimos, intercambiando los medios, como $\frac{8}{24} = \frac{5}{15}$ o, intercambiando los extremos como $\frac{15}{5} = \frac{24}{8}$, o, invirtiendo las razones, como $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$. En todos los casos el producto de extremos, 120 es igual al producto de medios, 120.

Ejemplo 90.3

1. Encontrar x, si $\frac{3}{4} = \frac{x}{12}$.
2. Hallar el valor de x en la proporción $\frac{4-x}{x+3} = \frac{2}{5}$.
3. Si una onda producida por una piedra que cae en un lago avanza 4 metros en 4 segundos, ¿cuánto avanzará en 7 segundos?

Solución

1. Como el producto de los extremos es igual al producto de los medios, tenemos que $36 = 4x$. Por tanto $x = 9$.
2. Como el producto de los extremos es igual al producto de los medios, $5(4-x) = 2(x+3)$. Resolviendo esta ecuación para x obtenemos $x = 2$.
3. Si t el tiempo en segundos y l la distancia recorrida por la onda en t segundos, tenemos la proporción $\frac{4}{4} = \frac{7}{l}$. Luego, $l = 7$ metros y entonces la onda avanzará 7 metros en 7 segundos.

También puede ocurrir que tres razones sean iguales entre sí, por ejemplo,

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}, \text{ con } x, y \text{ y } z \text{ diferentes de cero.}$$

En este caso cada razón es igual a una constante, llámemósla k, y así

$$\frac{a}{x} = k \quad \text{ó} \quad a = kx$$
$$\frac{b}{y} = k \quad \text{ó} \quad b = ky$$
$$\frac{c}{z} = k \quad \text{ó} \quad c = kz.$$

Ejemplo 90.4

Una cuerda de 90 centímetros de longitud se parte en tres pedazos que se encuentran en la razón 4 : 5 : 9, ¿cuál es la medida de cada uno de los pedazos?

Solución

Sea x la longitud del primer pedazo, y la del segundo y z la del tercero. Entonces $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{9}$. Como cada razón es igual a una constante k, $k \neq 0$, entonces $x = 4k$, $y = 5k$ y $z = 9k$. Como las tres longitudes deben sumar 90 centímetros, $4k + 5k + 9k = 90$, entonces, $18k = 90$ y así $k = 5$.

Por tanto, el primer pedazo mide $4(5) = 20$ centímetros, el segundo $5(5) = 25$ centímetros y el tercero $9(5) = 45$ centímetros.

Una aplicación de la igualdad entre tres razones se da en geometría cuando se trabaja con semejanza de triángulos.

Variación directa

En muchos problemas aparecen dos cantidades que pueden variar sin cambiar la razón entre ellas. Por ejemplo:

- Si una varilla de hierro de un metro de longitud pesa un kilo, entonces una varilla con dos metros de longitud pesa dos kilos, si mide tres metros pesa tres kilos y así sucesivamente. Tenemos en este caso dos variables asociadas, la *longitud* y el *peso*. A mayor longitud más peso y a menor longitud menos peso.

- Supongamos que viajamos por carretera entre Medellín y Bogotá a una velocidad constante de 80 km/h. En este caso tenemos dos variables, la *distancia* y el *tiempo*. Sabemos que mientras más tiempo haya transcurrido desde el inicio del viaje, más distancia habremos recorrido, es decir, a medida que aumenta el tiempo, aumenta la distancia recorrida. De la misma forma, el tiempo que falta para llegar a Bogotá disminuye a medida que la distancia entre nosotros y Bogotá disminuye.

En cada una de estas relaciones, si una variable aumenta (disminuye), la otra también aumenta (disminuye) en la misma proporción. Si llamamos x y y a las variables, decimos que y **varía directamente** con x o que y es **directamente proporcional** a x o que hay una **proporcionalidad directa** entre las variables.

En el primer ejemplo tenemos $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$. Observamos que la razón entre ambas variables se mantiene **constante** e igual a 1.

En el segundo ejemplo construyamos una tabla para analizar su proporcionalidad:

Distancia d (km)	**Tiempo t (horas)**
30	1/3
60	2/3
90	1

Observamos que la razón entre ambas variables se mantiene **constante**, independiente de como cambien las variables:

$$\frac{30}{\frac{1}{3}} = \frac{60}{\frac{2}{3}} = \frac{90}{1} = 90.$$

En este caso la constante es igual a 90 y la razón $\frac{d}{t}$ es la definición de velocidad v que se estudia en física: $v = \frac{d}{t}$.

En general, en la proporcionalidad directa, la razón entre las dos variables se mantiene constante, independientemente de como cambien las variables. Esto es, y varía directamente con x ó y es directamente proporcional a x, si existe una constante k diferente de cero tal que

$$\frac{y}{x} = k,$$

o en forma equivalente

$$y = kx.$$

Esta constante se llama **constante de proporcionalidad**.

Ejemplo 90.5

1. Expresar mediante una ecuación el siguiente enunciado: la longitud de una circunferencia C es directamente proporcional a la longitud de su diámetro d.

2. Si y varía directamente con x y $y = 27$ cuando $x = 6$, hallar y cuando $x = 2$.

Solución

1. Como C es directamente proporcional a d, entonces $\frac{C}{d} = k$, para alguna constante $k \neq 0$. Luego,

   $$C = kd.$$

   Un valor aproximado de la constante de proporcionalidad puede hallarse calculando el cociente entre la longitud y el diámetro de varias circunferencias. Como se verá luego en geometría este valor es π, y así $C = \pi d$.

2. Como y varía directamente con x, $\frac{y}{x} = k$, para alguna constante k, $k \neq 0$.

   Como $y = 27$ cuando $x = 6$, sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos $\frac{27}{6} = k$, y así $k = \frac{9}{2}$. Como $\frac{y}{x} = k$ y $k = \frac{9}{2}$, entonces $\frac{y}{x} = \frac{9}{2}$. Ahora podemos hallar y cuando $x = 2$, así:

   $\frac{y}{2} = \frac{9}{2}$. Como producto de extremos igual a producto de medios, $2y = 18$ y así $y = 9$. Luego, cuando $x = 2$, $y = 9$.

Variación inversa

En otros problemas pueden variar las cantidades pero el producto entre ellas permanece constante. Por ejemplo:

- Si para llenar un tanque de agua, abrimos una llave y digamos que se demora dos horas en llenarlo, ¿qué pasará si abrimos dos llaves a la vez? ¿cuánto tiempo se demorará en llenarse el tanque? Claramente, el tiempo para llenar el tanque disminuye si aumenta el número de llaves abiertas. En este caso las variables son el número de llaves y el tiempo requerido para llenar el tanque. Mientras más llaves, menos tiempo requerido para llenar el tanque.

- Si dos obreros tardan seis días en realizar un trabajo, y requerimos terminar más rápido el trabajo, entonces contratamos un obrero más, y los tres se demoran cuatro días para terminarlo, pero aún debemos terminar más rápido para lo que requerimos otros tres obreros, ya que entre todos estiman que terminarán el trabajo en 2 días. Tenemos en este caso dos variables: el número de obreros y el tiempo requerido para hacer el trabajo. A más obreros menos tiempo requerido para hacer el trabajo.

En cada una de estas relaciones si una variable aumenta la otra disminuye. Si llamamos x y y a las variables, decimos que y varía **inversamente proporcional** a x, o que y es **inversamente proporcional** a x, o que hay una *proporcionalidad inversa* entre las variables. En el segundo ejemplo tenemos:

Obreros (número)	**Tiempo (horas)**
2	6
3	4
6	2

Observamos que el producto entre las variables permanece constante, $2(6) = 3(4) = 6(2) = 12$.

En general, en la proporcionalidad inversa, el producto entre las dos variables se mantiene constante, independientemente de como cambien las variables. Esto es, y varía inversamente con x ó y es inversamente proporcional a x, si existe una constante k, $k \neq 0$, tal que

$$xy = k,$$

o en forma equivalente

$$y = \frac{k}{x}.$$

Esta constante se llama **constante de proporcionalidad**.

Ejemplo 90.6

1. Si y es inversamente proporcional a x y si $y = 6$ cuando $x = 8$, encontrar el valor de y cuando $x = 12$.

2. Las cantidades a^2 y b son inversamente proporcionales. Si $a = 2$ cuando $b = 3$, ¿cuál sería el valor de a, cuando $b = 5$?

Solución

1. Como x y y son inversamente proporcionales, entonces $x \cdot y = k$, para alguna constante k. Reemplazando y por 6 y x por 8 para hallar el valor de la constante tenemos $8 \cdot 6 = 48 = k$. Luego,
$$xy = 48.$$
Si $x = 12$ entonces $12y = 48$ y así $y = 4$.

   Podemos ver, que efectivamente las cantidades son inversamente proporcionales, cuando uno de los valores aumenta, el otro disminuye.

2. Como a^2 y b son inversamente proporcionales, $a^2b = k$ para alguna constante k. Reemplazando a por 2 y b por 3 hallamos la constante k, así: $2^2(3) = k$. Luego, $k = 12$ y entonces
$$a^2b = 12.$$
Si $b = 5$ tenemos $5a^2 = 12$. Luego, $a^2 = \frac{12}{5}$ y así $a = \pm 2\sqrt{\frac{3}{5}} = \pm\frac{2}{5}\sqrt{15}$.

Ejercicios propuestos

1. Hallar la razón entre las cantidades siguientes:
   (a) 6 kilogramos a 30 gramos.
   (b) 3 metros cuadrados a 6 centímetros cuadrados.
   (c) 3 centímetros cúbicos a 2 litros.
2. Si w es directamente proporcional a x y es igual a 15 cuando $x = 5$, encontrar el valor de w cuando $x = 2$.
3. Si w es directamente proporcional al cuadrado de d y $w = 20$ cuando $d = 2$, hallar w cuando $d = 5$.
4. Si a varía inversamente proporcional a b y a vale 3 cuando b vale 5, ¿cuál es el valor de a si $a = 7$?
5. Si x es inversamente proporcional al cuadrado de y y $x = 16$ cuando $y = 3$, ¿cuánto vale x cuando $y = 6$?

Respuestas

1. (a) 200.
   (b) 5.000.
   (c) $\frac{3}{2.000}$.
2. 6.
3. 125.
4. 4.

Índice